

RODRIGO JOLIG

**MODELO DE OTIMIZAÇÃO DINÂMICA PARA A
GESTÃO DE LONGO PRAZO DOS RECURSOS DE UM
PLANO DE PREVIDÊNCIA COMPLEMENTAR**

Trabalho de Formatura apresentado
à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para
obtenção do Diploma de Engenheiro
de Produção – Área Mecânica.

São Paulo

2003

RODRIGO JOLIG

**MODELO DE OTIMIZAÇÃO DINÂMICA PARA A
GESTÃO DE LONGO PRAZO DOS RECURSOS DE UM
PLANO DE PREVIDÊNCIA COMPLEMENTAR**

Trabalho de Formatura apresentado
à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para
obtenção do Diploma de Engenheiro
de Produção – Área Mecânica.

Orientadora:
Prof^a Dr^a Celma de Oliveira Ribeiro

São Paulo

2003

FICHA CATALOGRÁFICA

Jolig, Rodrigo

Modelo de otimização dinâmica para a gestão de longo prazo dos recursos de um plano de previdência complementar. São Paulo, 2003.

123p.

Trabalho de Formatura – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Produção.

1. Otimização em finanças 2. Previdência complementar
I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica.
Departamento de Engenharia de Produção II.t.

Aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

À professora Celma, pela orientação dada e todo o conhecimento transmitido, sem os quais não seria sequer capaz de iniciar este trabalho.

A meu chefe Mario Felisberto, que considero sobretudo um grande amigo e exemplo a ser seguido, pela colaboração no desenvolvimento deste trabalho e tempo dedicado à sua releitura. Suas idéias e esforços foram fundamentais para a qualidade do trabalho.

A Marcos de Callis e Nicolas Saad, não somente pela contribuição ao trabalho, mas principalmente pela confiança, ensinamentos e estímulos dados ao meu desenvolvimento profissional durante esses dois anos de relacionamento direto no banco.

Aos meus pais e a toda minha família, por todos os esforços que fizeram, propiciando as bases para que eu chegasse até aqui. Tenho certeza que estão tão orgulhosos quanto eu com a conclusão deste trabalho, e completamente realizados em terem seu filho se formando no curso de Engenharia de Produção da Poli.

A Erika, pelo carinho e companheirismo em todos os momentos, mesmo nos que estamos distantes, e pela compreensão quando tive que passar vários finais de semana desenvolvendo este trabalho.

A todos os demais amigos do banco, faculdade e da bolsa da CAPES, que foram muito importantes para a minha formação pessoal, e que deixei em segundo plano nos últimos meses.

Agradeço também a todos, que por uma injustiça de minha memória não mencionei explicitamente, mas contribuíram direta ou indiretamente à minha formação pessoal, acadêmica e profissional.

RESUMO

O presente trabalho consiste no estudo da gestão de longo prazo dos recursos de um plano de previdência complementar do tipo contribuição definida, com o objetivo de proporcionar a seus participantes uma aposentadoria com manutenção de padrão de vida. Entende-se por gestão a definição do nível de contribuição ao plano e da forma de investimento destes recursos, alocando-os entre ativos de renda fixa e ações. O trabalho apresenta um modelo multi-período de otimização dinâmica, que maximiza a utilidade de um indivíduo obtida a partir do nível de consumo ao longo de toda sua vida. O texto discute as formas de estimação dos parâmetros deste modelo, resultados alcançados e seu comportamento perante variações nas condições de entrada. O desenvolvimento do trabalho foi voltado para a implementação deste modelo teórico, dadas as necessidades da empresa onde este foi realizado. Com base nisso, foi elaborado um estudo de caso, que estabelece uma proposta de reestruturação de um plano de previdência à luz dos resultados obtidos com o modelo apresentado.

ABSTRACT

This work involves a study of defined contribution pension plans, with the objective of preserving the standard of living of participants once they retire. The two key answers to be determined for each participant are the share of their salaries contributed to the pension plan and the allocation of the investments between equity and fixed income assets. In this paper, we develop a dynamic optimization model over the investors' life cycle, maximizing the utility they derive from consumption. We discuss the procedures for obtaining the model's parameters, its main results and the sensibility of the optimal solution to variations in the input data. The work was developed with a strong focus on the implementation of the theoretical model, following the guidelines of the bank that supported it. As a consequence, we present a case study with a restructuring proposal for a Brazilian defined contribution pension plan, using the features of this new optimization model but taking into consideration the constraints that affect the local plans.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

CAPÍTULO 1: INTRODUÇÃO	1
1.1 OBJETIVO DO TRABALHO.....	1
1.2 A EMPRESA ONDE FOI REALIZADO O TRABALHO	3
1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO	3
CAPÍTULO 2: A INDÚSTRIA DE PREVIDÊNCIA COMPLEMENTAR.....	5
2.1 A PREVIDÊNCIA SOCIAL	5
2.2 TIPOS DE PLANOS DE PREVIDÊNCIA COMPLEMENTAR E MODELOS DE ADMINISTRAÇÃO	9
CAPÍTULO 3: DEFINIÇÃO DO MODELO	12
3.1 INTRODUÇÃO	12
3.2 TEORIA MODERNA DE CARTEIRAS	13
3.3 UTILIDADE COMO FUNÇÃO OBJETIVO	19
3.4 O CICLO DE VIDA DO INVESTIDOR E SUA RIQUEZA INTRÍNSECA.	23
3.5 DEFINIÇÃO DA ESTRUTURA DO MODELO DE OTIMIZAÇÃO.....	26
3.6 DESCRIÇÃO DETALHADA DOS PROCESSOS ESTOCÁSTICOS.	30
3.7 RESUMO DO MODELO DESENVOLVIDO E CONCLUSÕES.....	37
CAPÍTULO 4: DETALHAMENTO DOS PARÂMETROS DO MODELO	39
4.1 INTRODUÇÃO	39
4.2 O COEFICIENTE DE AVERSÃO AO RISCO.	42
4.3 A EVOLUÇÃO SALARIAL DO INDIVÍDUO	50
4.4 PARÂMETROS DEMOGRÁFICOS E DE MERCADO.....	60

CAPÍTULO 5: RESOLUÇÃO, RESULTADOS E ANÁLISE DE SENSIBILIDADE DO MODELO	66
5.1 INTRODUÇÃO	66
5.2 MÉTODO DE SOLUÇÃO NUMÉRICA	67
5.3 RESULTADOS OBTIDOS	74
5.4 SIMULAÇÃO: A EVOLUÇÃO ESPERADA DO PATRIMÔNIO E DA POLÍTICA ÓTIMA DE INVESTIMENTOS DO INDIVÍDUO	78
5.5 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE: A AVERSÃO A RISCO DO INVESTIDOR E SEU PATRIMÔNIO INICIAL	84
5.6 ANALISE DE SENSIBILIDADE: OS PARÂMETROS ASSOCIADOS À RENDA.	88
5.7 CONCLUSÕES	94
CAPÍTULO 6: APLICAÇÃO A UM PLANO DE CONTRIBUIÇÃO DEFINIDA – UM ESTUDO DE CASO	98
6.1 INTRODUÇÃO E DESCRIÇÃO DO PROBLEMA.....	98
6.2 MÉTODO DE SOLUÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS.....	100
6.3 RESULTADOS OBTIDOS E PROPOSTA DE PLANOS	105
CAPÍTULO 7: CONCLUSÃO.....	108
ANEXO A: QUESTIONÁRIO PARA DETERMINAÇÃO DO PERFIL DE RISCO DO INVESTIDOR.....	111
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	121

APÊNDICES

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1 – Efeito da correlação entre os ativos sobre o risco total do <i>portfolio</i>	15
Figura 3.2 – A fronteira de eficiência de Markowitz.....	16
Figura 3.3 – O CAPM e a reta do mercado de capitais (SML).....	18
Figura 3.4 – A função de utilidade do investidor.....	21
Figura 3.5 – Utilidade potencial e utilidade logarítmica.....	22
Figura 3.6 – Movimento Browniano do valor do <i>portfolio</i> de mercado.	32
Figura 3.7 – Evolução salarial do indivíduo <i>A</i>	34
Figura 3.8 – Evolução salarial do indivíduo <i>B</i>	35
Figura 4.1 – A função de utilidade potencial para diferentes parâmetros γ	46
Figura 4.2 – Evolução da renda esperada em função do grau de escolaridade.....	52
Figura 4.3 – Trajetórias esperadas para o crescimento salarial dos indivíduos com e sem curso universitário completo.	54
Figura 4.4 – Evolução da probabilidade de permanência no emprego para trabalhadores da região metropolitana de São Paulo.	56
Figura 4.5 – Tábua de mortalidade e extrapolação realizada.....	62
Figura 5.1 – Visualização do formato da curva de utilidade e seu respectivo ponto de máximo para o indivíduo B.....	76
Figura 5.2 – Evolução esperada da riqueza do Indivíduo A, bem como suas políticas ótimas de contribuição e alocação em ações ao longo do tempo.	79
Figura 5.3 – Razão entre o consumo recomendado ao Indivíduo A e sua necessidade básica de subsistência.....	79
Figura 5.4 – Evolução esperada da riqueza do Indivíduo B, bem como suas políticas ótimas de contribuição e alocação em ações no futuro.	81
Figura 5.5 – Razão entre o consumo recomendado ao Indivíduo B e sua necessidade básica de subsistência.....	82
Figura 5.6 – Evolução esperada da riqueza do Indivíduo C, bem como suas políticas ótimas de contribuição e alocação em ações no futuro.	83

Figura 5.7 – Sensibilidade da solução ótima às variações na aversão a risco dos investidores e as bandas qualitativas de γ	85
Figura 5.8 – Alocação inicial em ações do indivíduo B em função de sua riqueza inicial, com destaque dado ao seu ponto crítico.....	87
Figura 5.9 – Convergência para os valores críticos de toda a curva de expectativa de alocação futura do Indivíduo B com o aumento de sua riqueza inicial.	87
Figura 5.10 – Sensibilidade da curva de evolução da alocação ótima em ações do Indivíduo B a valores de riqueza inicial superiores ao ponto crítico	88
Figura 5.11 – A alocação ótima em ações para o Indivíduo A em função do risco envolvido em sua riqueza intrínseca.	89
Figura 5.12 – Contribuição ótima média para diferentes níveis de comprometimento da renda e de idades iniciais e as bandas qualitativas de nível de comprometimento.	91
Figura 5.13 – Dispersão das contribuições ótimas ao fundo ao longo da vida dos indivíduos.....	93
Figura 5.14 – Diversidade de alocação de ativos em 1995.....	94
Figura 6.1 – Distribuição etária do plano estudado e as três faixas de idade consideradas.....	102
Figura 6.2 – Dispersão dos participantes por saldo acumulado e idade, e as duas divisões de riqueza inicial.....	103
Figura 6.3 – Frequência das decisões ótimas de alocação em ações.....	106
Figura 6.4 – Proposta de 4 planos, com seus respectivos limites e valores médios de alocação em ações.....	106

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 – Valores da função utilidade para diferentes níveis de consumo e diferentes parâmetros γ	47
Tabela 4.2 – Parâmetro de aversão a risco de cada perfil.	47
Tabela 4.3 – Razão entre as expectativas salariais e o consumo de subsistência, para diferentes números de dependentes.....	59
Tabela 4.4 – Resumo dos métodos de determinação e valores dos parâmetros.....	65
Tabela 5.1 – Valores dos parâmetros A_k e $\eta_{i,k}$	71
Tabela 5.2 – Características necessárias para a definição dos parâmetros de cada um dos 3 indivíduos adotados.	74
Tabela 5.3 – Resultado das otimizações para cada tipo de indivíduo.....	75
Tabela 6.1 – Recomendações ótimas de alocação em ações e contribuição para todas as possíveis classificações dos participantes do plano.	105



INTRODUÇÃO

CAPÍTULO 1: INTRODUÇÃO

1.1 Objetivo do trabalho

A seguridade social é um assunto que tem estado na pauta das discussões dos mais diversos níveis da sociedade brasileira. O sistema público de previdência social ainda é o principal responsável pela garantia de renda das pessoas após suas aposentadorias. Apesar disto, segundo o IBGE, para aproximadamente 11 milhões de brasileiros deste sistema que ainda estão trabalhando, os benefícios a serem recebidos futuramente serão inferiores aos salários que terão antes de se aposentarem. Dessa forma, a manutenção de seus padrões de vida a partir deste momento estará seriamente comprometida se um certo patrimônio não for acumulado para complementar suas rendas no futuro.

Por isso, ao longo da última década, o mercado brasileiro tem observado o forte crescimento de um novo segmento previdenciário, que surgiu para incrementar o benefício proveniente do plano de previdência pública, que são os planos privados de previdência complementar.

Os fundos de pensão são entidades sem fins lucrativos responsáveis pela administração de planos de previdência complementar de indivíduos (chamados de participantes do plano) que desejam poupar recursos para sua aposentadoria. Estes fundos estão geralmente vinculados a uma empresa patrocinadora, e administram os planos de previdência elaborados exclusivamente para seus funcionários.

Ao aderirem a estes planos, os participantes devem realizar contribuições periódicas num determinado valor que seja suficiente para que o volume acumulado no momento de sua aposentadoria atenda a suas necessidades financeiras. Muitas vezes, a patrocinadora complementa essas contribuições com um dado valor fixo, oferecendo assim um benefício extra a seu funcionário. Ao fundo de pensão cabe recolher estas contribuições e administrá-las de forma a atender às necessidades

futuras do participante. O fundo pode terceirizar parcialmente ou integralmente estas tarefas, delegando, por exemplo, a atividade de gestão destes ativos a um gestor especializado.

Do ponto de vista da formação de poupança de longo prazo, surgem duas perguntas básicas e de crucial importância que devem ser respondidas ao participante do fundo:

1. Quanto poupar a cada mês?
2. Como investir esse dinheiro?

Atualmente, estas questões são abordadas de maneira independente. A decisão de poupança é analisada como um problema clássico de engenharia financeira, ou seja, estimando-se um valor necessário de patrimônio no momento da aposentadoria e assumindo-se uma certa taxa de desconto, chega-se ao valor a ser pago mensalmente para que este patrimônio seja atingido ao final do período de contribuição. A decisão de investimento deve ser aquela que garanta uma rentabilidade próxima a essa taxa de desconto utilizada.

Muito tem sido pesquisado mundialmente para melhorar a forma de gestão dos recursos destes planos de previdência complementar, para que os fundos possam oferecer um serviço de qualidade superior a seu cliente, aumentando assim sua satisfação. O objetivo deste trabalho é, com base nos recentes avanços, desenvolver um modelo mais sofisticado de otimização que responda às duas questões apresentadas de forma integrada, para aumentar as possibilidades de que os participantes tenham uma aposentadoria que permita a manutenção de seus padrões de vida.

1.2 A empresa onde foi realizado o trabalho

Este trabalho foi realizado na área de administração de recursos de terceiros de um grande conglomerado financeiro multinacional, que está presente no Brasil a mais de 5 anos. O trabalho é destinado a dois segmentos de clientes do banco: o primeiro é o dos fundos de pensão que terceirizam a gestão dos recursos de seus participantes. Estas fundações têm seus ativos administrados através de um produto chamado carteira administrada e pagam uma taxa de administração pelo serviço prestado.

O outro segmento é o das pessoas físicas que aderem aos planos abertos de previdência complementar administrados pelo próprio banco. Dentre estes, destacam-se os planos PGBLs (Planos Geradores de Benefícios Livres) e VGBLs (Vida Gerador de Benefícios Livres). Atualmente, nestes dois segmentos, o banco tem sob sua gestão mais de R\$ 11 bilhões, o que o torna um dos maiores em termos de participação de mercado nestes segmentos de clientes.

O alto potencial de crescimento esperado deste tipo de produto no Brasil é mais um fator que motivou o desenvolvimento deste trabalho. Além disso, o mercado de administração de recursos de terceiros tem apresentado nos últimos anos uma forte concentração de volume entre as maiores empresas, e uma sofisticação adicional na forma de prestação deste serviço da dimensão apresentada neste trabalho pode representar um diferencial competitivo bastante significativo.

1.3 Estrutura do trabalho

No Capítulo 2 faremos uma breve descrição das principais características da indústria de previdência complementar, contextualizando os objetivos deste trabalho. Veremos que os planos de previdência complementar são classificados basicamente em duas grandes classes, sendo que a dos planos do tipo contribuição definida é a que apresenta a maior expectativa de crescimento. O modelo

desenvolvido neste trabalho é destinado mais especificamente a este tipo de plano, sendo que a outra classe (a dos planos do tipo benefício definido) já foi extensivamente analisada na literatura e portanto não é foco do trabalho.

O Capítulo 3 é dedicado ao modelo de otimização desenvolvido para a definição das políticas ótimas de contribuição e gestão de ativos dos participantes do plano. Apresentaremos também a revisão bibliográfica realizada e detalharemos os conceitos básicos de finanças necessários à compreensão do modelo.

Como veremos, o modelo em análise considera algumas características específicas do investidor e da realidade em que este está inserido, quantificando-as através de uma série de parâmetros. Os processos utilizados para se estimar tais parâmetros, ou suas fontes de obtenção, são descritos no Capítulo 4. No Anexo A temos um questionário desenvolvido para a determinação de um destes parâmetros. O objetivo dos estudos mostrados neste capítulo é o de viabilizar a implementação do modelo com base nos dados atualmente disponíveis.

A implementação do modelo e os resultados obtidos serão discutidos no Capítulo 5. Elaboraremos também uma análise de sensibilidade a variações em seus principais parâmetros, para entendermos melhor seu comportamento e fundamentar seus resultados.

No Capítulo 6 apresentaremos um estudo de caso de como o modelo desenvolvido poderia ser implementado para todo um plano de previdência real, dada as atuais restrições operacionais, culturais e legais que ainda existem no segmento de fundos de pensão brasileiro.

Por fim, o Capítulo 7 apresentará as conclusões do trabalho com os benefícios esperados de sua implementação na empresa em que este trabalho foi desenvolvido.



A INDÚSTRIA DE PREVIDÊNCIA COMPLEMENTAR

CAPÍTULO 2: A INDÚSTRIA DE PREVIDÊNCIA COMPLEMENTAR

2.1 A previdência social

A previdência social nasceu da necessidade de se assegurar ao cidadão uma fonte de renda após este perder sua capacidade produtiva, seja por doença, invalidez, idade avançada, desemprego involuntário ou maternidade. Segundo Boulier; Dupré (2003), na maioria dos países do mundo, na qual se inclui o Brasil, a previdência social está estruturada através de três pilares:

1. Previdência básica;
2. Previdência complementar fechada;
3. Previdência complementar aberta.

No Brasil, a previdência básica é compulsória a todos os cidadãos assalariados e de responsabilidade pública. Para tal, estão previstos na Constituição Federal dois regimes distintos de previdência básica: o RGPS (Regime Geral de Previdência Social), voltado para os trabalhadores da iniciativa privada e é administrado pelo INSS (Instituto Nacional de Seguridade Social), e o RPSP (Regime Próprio dos Servidores Públicos), que é destinado aos funcionários de carreira do Estado, nos três níveis da federação. A principal diferença entre os dois é a profunda desigualdade entre os valores das pensões e benefícios pagos. O teto para trabalhadores aposentados pelo INSS é de cerca de R\$1.500,00 por mês, enquanto os servidores públicos recebem benefícios muitas vezes iguais ou superiores ao último salário.

Ambos também são conhecidos meramente por sistema de Previdência Pública, e trabalham em regime de repartição, isto é, os recursos captados dos trabalhadores na ativa via contribuições salariais são destinados ao pagamento dos benefícios dos aposentados. Com o envelhecimento da população, aumento da

informalidade no mercado de trabalho e a redução nas taxas de inflação, um aposentado que na década de 70 era sustentado por 4,5 trabalhadores da ativa hoje é custeado por 1,7 em média (BOULIER; DUPRÉ, 2003). Por isto, e devido aos altos valores pagos a título de benefícios aos aposentados do setor público, observa-se nos números da Previdência um profundo desequilíbrio entre contribuições e benefícios. Em 2001, as contribuições anuais líquidas eram da ordem de 6% do PIB (5,5% do INSS e 0,6% advindo do setor público), enquanto os benefícios alcançavam mais de 11% do PIB (6,3% do INSS e 4,7% para o setor público). Esse déficit de 5% do PIB explica mais de 80% de todo o déficit público nominal brasileiro.

Com base nisso, começou-se a estudar a migração deste regime de repartição para um regime de capitalização. Nesse regime, os recursos captados dos trabalhadores são administrados de forma a garantir o pagamento de seus futuros benefícios. Outra característica deste regime é o incentivo à criação de uma poupança interna, que seria capaz de contribuir para o crescimento econômico sustentado do país. Porém, uma mudança imediata no sistema básico de previdência seria praticamente inviável, pois implicaria em custos de transição estimados na ordem de 300% do PIB, onde a atual geração deveria financiar duplamente sua aposentadoria.

A principal fonte do déficit fiscal das contas da Previdência provém das aposentadorias dos cerca de 2 milhões de servidores públicos. As perdas com o INSS, responsável pelos benefícios de 16 milhões de brasileiros da iniciativa privada são bem menores. Atualmente, está em tramitação no Congresso Nacional um projeto de emenda constitucional que busca reduzir essas diferenças, sendo que o ponto mais importante é impor um teto também para os benefícios dos servidores públicos.

O segundo pilar da previdência social é a previdência complementar fechada, gerida por entidades privadas de previdência¹ através do regime de capitalização. Essas entidades são o conjunto de fundações sem fins lucrativos ligadas a empresas patrocinadoras públicas ou privadas que têm como objetivo administrar planos de previdência complementar desenvolvidos para os funcionários dessas empresas. A atividade dessas fundações é regulamentada no Brasil desde meados da década de 70, porém seu desenvolvimento mais acentuado se deu somente a partir dos anos 90 (TENDÊNCIAS, 1999 *apud* SAAD, 2000), quando as taxas de inflação passaram a patamares aceitáveis.

Isso ocorreu porque, com a estabilidade econômica, muitas empresas se sentiram estimuladas a oferecer a seus funcionários o benefício da previdência complementar. Para o funcionário, essa é uma forma de garantir a manutenção de seu padrão de vida após a aposentadoria, uma vez que, para uma parcela cada vez maior da população, o benefício pago pela Previdência Pública é insuficiente para esse fim.

A fundação criada pela empresa patrocinadora é a responsável pela gestão das contribuições feitas pelos participantes ativos e pela empresa e do pagamento do benefício aos participantes aposentados, podendo terceirizar parcialmente ou totalmente essas atividades.

Existe uma opção para empresas menores, que também desejem oferecer a seus funcionários o benefício da previdência complementar fechada, mas que não podem arcar com os custos de manutenção de uma fundação independente, que é a adesão a um fundo de pensão multipatrocinado. Os fundos de pensão multipatrocinados são fundos que administram diversos planos de aposentadoria complementar de varias empresas patrocinadoras, que dividem entre si os custos

¹ Entidades de previdência são instituições que possuem como atividade principal a captação de recursos para o pagamento de aposentadorias dos indivíduos participantes do sistema. O INSS é um exemplo de entidade de previdência.

fixos associados à gestão do fundo, às despesas administrativas, com instalações, etc. Normalmente, tanto nos planos de fundações exclusivas quanto nos de fundos multipatrocinados, o vínculo do participante ao plano está atrelado com o seu vínculo à empresa.

O terceiro pilar da previdência social é composto pelos planos abertos de previdência complementar. Assim como os planos fechados geridos pelos fundos de pensão, estes são administrados por entidades privadas de previdência segundo o regime de capitalização. A diferença básica em relação aos planos descritos anteriormente é que estes são voltados para a adesão individual do participante, e independem de um vínculo com uma empresa patrocinadora. Nessa situação, as contribuições são, em geral, feitas integralmente pelo participante, que tem maior liberdade na administração de sua poupança. Dois exemplos de planos deste tipo que têm apresentado taxas de crescimento significativas são os PGBLs (Planos Geradores de Benefícios Livres) e os VGBLs (Vida Geradores de Benefícios Livres). A principal diferença entre os dois é o tratamento tributário.

Uma possível solução para o problema do déficit nas contas da Previdência Pública brasileira seria proporcionar o desenvolvimento dos pilares da previdência complementar (tanto a fechada quanto aberta), reduzindo assim a participação do primeiro na composição do benefício total a ser recebido pelas pessoas. Países desenvolvidos como a França, que também apresentam um elevado déficit nas contas do sistema previdenciário público, têm adotado metas agressivas neste sentido.

Para encerrar a discussão com alguns dados estatísticos, no mundo, os fundos de pensão têm sob sua administração um montante financeiro da ordem de 10 trilhões de dólares (BOULIER; DUPRÉ, 2003) sendo que, no Brasil, segundo o Ministério da Previdência Social este volume é de cerca de 215 bilhões de reais (aproximadamente 72 bilhões de dólares). Atualmente apenas 9,5% da população brasileira contribui para planos de previdência complementar, um número bastante baixo quando comparado com os Estados Unidos (47%), mesmo se considerarmos

nossos problemas de distribuição de renda. Esses números são um outro indicador do alto potencial de crescimento da indústria de previdência complementar no Brasil.

Na seção seguinte abordaremos uma diferença básica que existe entre os planos de previdência complementar, que implica inclusive em diferentes riscos e formas de gestão para cada um.

2.2 Tipos de planos de previdência complementar e modelos de administração

É possível dividir os planos de previdência complementar em dois grandes grupos de características bastante distintas: os planos do tipo **Benefício Definido (BD)** e os planos do tipo **Contribuição Definida (CD)**. A seguir, descreveremos as principais características de cada um.

Nos planos do tipo BD, o benefício complementar a ser recebido pelo participante é função de seu salário ao longo do período de contribuição. As contribuições feitas (pelo participante e/ou pela patrocinadora) ao longo da etapa de acumulação de riqueza devem ser investidas em ativos de mercado de tal forma que a rentabilidade destes ativos seja suficiente para cobrir esse passivo do plano, que independe das oscilações de mercado. O principal risco deste tipo de plano é exatamente a rentabilidade obtida com os ativos não ser capaz de financiar estes benefícios no futuro, gerando assim um déficit no plano, que deve ser coberto pela empresa patrocinadora.

A outra modalidade de planos de previdência complementar existente é a dos planos CD, cuja característica principal é o fato dos benefícios a serem recebidos no futuro dependerem exclusivamente da massa de recursos acumulada ao longo do período, bem como dos rendimentos obtidos através de seus investimentos. Assim, no ato da aposentadoria, a partir do saldo acumulado na conta de cada participante

calcula-se o valor do benefício que lhe será pago deste ponto em diante. Dependendo da configuração de cada plano em específico, o participante recebe de uma única vez todo o saldo acumulado, ou pode converter o saldo em uma renda pré fixada vitalícia ou por um determinado número de anos. A principal característica deste tipo de plano é eliminar o risco da patrocinadora, que no caso do plano BD pode ter que cobrir um eventual déficit.

No passado, a maioria dos planos fechados de aposentadoria, que eram criados no Brasil e no mundo, era do tipo BD. Por isso, foram desenvolvidas poderosas ferramentas de otimização para a alocação de carteiras de ativos que minimizassem este risco das empresas patrocinadoras. Os modelos de gestão ativo/passivo, ou como são mais conhecidos, modelos de *Asset/Liability Management* são um exemplo disto. Esse tipo de modelo apresenta uma ótima aderência às necessidades da empresa patrocinadora, mas podem não estar maximizando a riqueza total do investidor.

Com o passar dos anos, as empresas que oferecem o benefício complementar fechado a seus funcionários têm buscado migrar dos atuais planos BD para planos do tipo contribuição definida, pois estes atendem igualmente os seus objetivos (proporcionar mais um benefício a seus funcionários) sem a presença do risco do déficit nas contas do plano. Mesmo com a forte resistência dos participantes, é irrefutável a tendência hoje de crescimento no número de planos do tipo CD em detrimento dos planos BD. Já na área de previdência complementar aberta, pelo mero fato de não apresentarem empresa patrocinadora, todos os planos de previdência complementar são do tipo CD.

A maioria das ferramentas de gestão desenvolvidas para os planos BD não se aplica às estratégias de investimento dos planos CD, devido à inexistência deste passivo previamente definido e acordado com os participantes do plano. A política ótima de investimentos de um plano CD deve ser a que maximiza os objetivos de rentabilidade de cada participante, sendo esta compatível com sua tolerância ao risco. Dessa forma, a metodologia ideal de administração de um plano CD deveria

propiciar a segmentação de perfis, onde cada participante poderia escolher o investimento que melhor atendesse a sua expectativa de risco e retorno. As contribuições ao plano também devem ser definidas de tal forma que o saldo acumulado no momento de sua aposentaria seja capaz de financiar a manutenção de seu padrão de vida.

Por esse motivo, e tendo em vista o aumento da demanda por ferramentas específicas e mais sofisticadas voltadas para a gestão dos recursos de planos de previdência complementar do tipo CD, desenvolvemos neste trabalho um modelo de otimização que visa determinar a política ótima de contribuições de um indivíduo a um fundo de pensão (aberto ou fechado) do tipo contribuição definida, bem como as decisões ideais de alocação que garantam a manutenção de seu padrão de vida quando aposentados.



DEFINIÇÃO DO MODELO

CAPÍTULO 3: DEFINIÇÃO DO MODELO

3.1 Introdução

Conforme apresentado no Capítulo 2, os objetivos dos modelos de otimização voltados para a gestão de longo prazo dos ativos de um fundo de pensão podem variar dependendo do tipo de plano de previdência complementar a que são destinados.

Os modelos de gestão Ativo/Passivo, ou *Asset/Liability Management* (ALM), são ferramentas poderosas para a gestão de longo prazo de ativos de fundos do tipo benefício definido. Esses modelos partem de uma característica inerente dos fundos BD, que é a existência de um passivo atuarial. Este passivo corresponde a todos os desembolsos de caixa presentes e futuros a que a fundo está sujeito, de forma a garantir o pagamento do benefício acordado com cada participante. Saad (2000) apresenta um modelo de Gestão Ativo/Passivo que, com base nesse passivo, determina uma carteira de ativos que garanta o pagamento dessas obrigações com o menor risco possível. Costa Silva (2001) sugere um algoritmo de decomposição estocástica a para solução do mesmo tipo de problema.

Já no caso dos fundos do tipo contribuição definida não existe esse passivo, uma vez que o montante a ser pago ao participante depende exclusivamente do saldo acumulado em sua conta. Isso impossibilita a aplicação desses modelos. Conforme sugerido, a metodologia ideal de administração destes fundos deveria propiciar a segmentação de perfis, onde cada participante escolheria o investimento que melhor atendesse a suas necessidades e características de risco e retorno. Portanto, o modelo de otimização deve determinar a estratégia ótima de gestão dos recursos de um participante individualmente, bem como sua política ideal de contribuições ao fundo para que seu padrão de vida seja preservado quando se aposentar.

Dessa forma, com base na vasta revisão bibliográfica realizada, desenvolvemos um modelo de otimização multi-período para a gestão dos recursos e determinação das contribuições de um indivíduo para um fundo do tipo contribuição definida. Iniciaremos a apresentação deste modelo na seção 3.2, onde introduzimos conceitos básicos de risco, retorno e da composição de uma carteira de ativos.

Um conceito que será muito utilizado ao longo deste trabalho é a noção de utilidade dos investidores, que detalharemos na seção 3.3. O grande diferencial da modelagem desenvolvida é a consideração do ciclo de vida das pessoas, já que este tem forte influência sobre o processo de tomada de decisão. Na seção 3.4 explicitaremos seus efeitos, pois são base para o entendimento de todo o modelo, e cuja estrutura propriamente dita apresentaremos na seção 3.5.

As incertezas quanto ao futuro representam o risco ao qual o investidor está sujeito ao poupar seus recursos para a aposentadoria. Este risco é contemplado pelo modelo através da adoção de algumas variáveis aleatórias. Na seção 3.6 descreveremos os processos estocásticos assumidos que regem seus comportamentos. Encerraremos o capítulo com um resumo do modelo desenvolvido e as considerações finais a seu respeito.

3.2 Teoria Moderna de Carteiras

Em 1952, Harry Markowitz desenvolveu uma maneira nova de abordar os problemas de decisão de investimento, que ficou conhecida como a Teoria Moderna de Carteiras. Até então, essas decisões eram tomadas a partir de análises individuais de cada ativo, podendo esta seguir a escola técnica ou fundamentalista¹. Markowitz

¹ A escola técnica ou grafista, se baseia na análise os preços do ativo no passado, tentando identificar alguma tendência que possa vir a se repetir no futuro. A escola fundamentalista por outro lado, estuda as variáveis internas e externas ao ativo, que são relevantes à formação de seu preço, e busca, através de projeções de valores para essas variáveis no futuro, determinar a tendência do preço deste ativo.

começou a estudar o movimento relativo entre os preços de diferentes ativos, percebendo que a combinação de um ou mais ativos em uma carteira levava a resultados totalmente diferentes do que se esperava analisando-os um a um. A grande novidade da teoria de Markowitz foi a identificação de um efeito que hoje é bastante aceito, que é o da diversificação.

A evolução dos preços dos ativos existentes na economia é bastante incerta, ou seja, há um risco acerca de sua taxa de retorno esperada. Markowitz propõe a quantificação deste risco através do desvio padrão da distribuição de retornos do ativo. Essa medida ficou conhecida posteriormente em finanças como volatilidade do ativo. Entretanto, existe uma correlação entre os retornos de diferentes ativos, que é responsável pelo efeito de diversificação. Por exemplo, analisemos o caso de uma carteira composta por apenas dois ativos, A e B . O retorno esperado e o risco desta carteira são dados através das seguintes equações:

$$R_p = x_A R_A + x_B R_B \quad (3.1)$$

$$\sigma_p = \sqrt{x_A^2 \sigma_A^2 + x_B^2 \sigma_B^2 + 2x_A x_B \sigma_A \sigma_B \text{correl}(r_A, r_B)} \quad (3.2)$$

Onde

R_p é a expectativa de retorno da carteira. No mercado financeiro, o termo carteira também é conhecido pela sua denominação em inglês *portfolio*, daí o índice p . Ao longo deste trabalho, empregaremos ambas as expressões.

σ_p é o risco, ou volatilidade, do *portfolio*, quantificado pelo desvio padrão esperado de seus retornos.

R_A e R_B são as esperanças de retorno dos ativos A e B para o período em questão. Uma estimativa inicial de seus valores é a média da distribuição passada de retornos, entretanto, como o comportamento histórico dos preços não se repete obrigatoriamente no futuro, esta pode não ser a melhor estimativa. Outras maneiras de se determinar esses valores são através da utilização de ferramentas de análise técnica ou fundamentalista.

σ_A e σ_B são os desvios padrões esperados dos retornos dos ativos A e B . Utiliza-se normalmente como estimativa para o desvio padrão futuro de um determinado ativo o desvio padrão de uma amostra de retornos passados deste.

x_A e x_B são as participações percentuais dos ativos A e B na carteira. São calculados através da divisão do montante financeiro aplicado no ativo em questão pelo valor total do *portfolio* ($A + B + \text{posição em caixa}$).

$\text{correl}(r_A, r_B)$ é a correlação entre as variáveis aleatórias r_A e r_B , que são os retornos dos ativos A e B . Notar a diferença de notação: R_A é a esperança de r_A , que pode ser determinada através da média dos valores históricos de r_A ou qualquer outro método de previsão.

As combinações entre os ativos A e B geram carteiras P , cuja configuração de risco e retorno depende da correlação entre ambos. Isso pode ser observado graficamente logo a seguir:

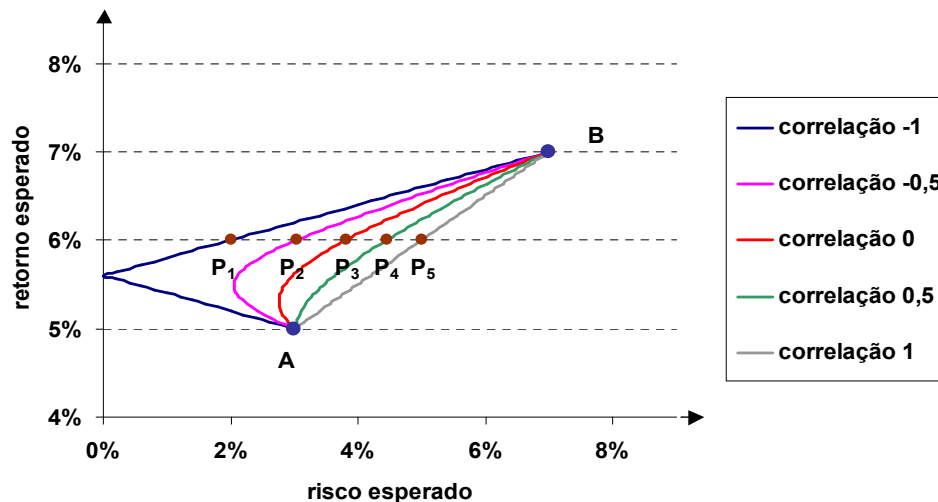


Figura 3.1 – Efeito da correlação entre os ativos sobre o risco total do *portfolio*.

Em termos de composição, todas as carteiras P da **Figura 3.1** são idênticas, com 50% de alocação no ativo A e 50% no B . Dessa forma, segundo a equação (3.1) o retorno esperado para todas é o mesmo. As diferenças de volatilidade entre elas se dão exclusivamente devido a diferentes correlações entre os ativos A e B . Percebe-se que, pelo efeito de diversificação, o risco da carteira resultante decresce à medida

que a correlação entre os ativos cai, sendo este sempre inferior à combinação linear dos riscos individuais de cada ativo para correlações menores do que 1.

Agora, para um universo onde há N ativos, as equações de risco (3.1) e retorno do *portfolio* (3.2) podem ser escritas da seguinte forma matricial:

$$R_p = x^t * R \quad (3.3)$$

$$\sigma_p^2 = x^t * M * x \quad (3.4)$$

onde x é o vetor coluna das participações percentuais de cada ativo na carteira P ;

R é o vetor coluna com as expectativas de retorno de cada ativo e;

M é a matriz de covariância entre os N ativos disponíveis, de dimensão $N \times N$.

Segundo Markowitz, os investidores buscarão sempre que possível montar *portfolios* que minimizem o risco total através da procura de ativos negativamente correlacionados. Desta forma, define-se fronteira de eficiência como sendo a curva traçada no plano $Rx\sigma$ que é o conjunto de todos os *portfolios* de mínimo desvio padrão para cada nível de retorno esperado. No gráfico da **Figura 3.2**, a semi-reta $\overrightarrow{OQ}$ representa a fronteira de eficiência.

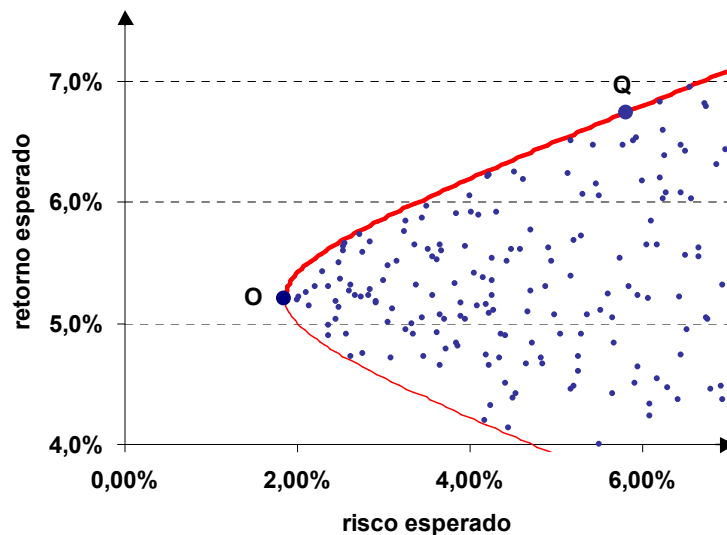


Figura 3.2 – A fronteira de eficiência de Markowitz.

A fronteira pode ser determinada através do seguinte modelo de otimização quadrática:

$$\min x^t * M * x$$

s.a.:

$$\sum_{i=1}^N x_i = 1$$

$$x^t * R = c$$

$$x > 0$$

Onde:

x_i representa cada um dos componentes do vetor coluna x e;

c é um parâmetro de retorno desejado, para o qual se pretende obter a carteira de menor risco.

É interessante notar que existe um *portfolio* de menor risco entre todos os demais, independente do retorno que se deseja. Essa carteira é conhecida como a carteira de mínima variância, que está representada pelo ponto O na **Figura 3.2**. Essa carteira pode ser obtida através da eliminação da restrição $x^t * R = c$ do modelo apresentado anteriormente.

As maiores dificuldades de aplicação deste tipo de modelo se concentram na etapa de determinação da matriz de covariâncias entre os ativos e na resolução computacional. Quanto maior o número de ativos envolvidos na otimização, maior serão as dimensões da matriz M e, conseqüentemente, maior será a quantidade de contas a serem feitas durante a resolução.

Sharpe (1964) desenvolveu uma teoria de precificação de ativos que simplifica bastante este problema, sendo conhecida pela sua denominação em inglês, que é o *Capital Asset Pricing Model* (CAPM). Segundo o CAPM os investidores estão dispostos a montar uma carteira que seria composta somente por:

- um ativo livre de risco, com retorno certo e desvio padrão nulo.
- o *portfolio* de mercado, uma carteira composta por todos os ativos de risco existentes, com pesos proporcionais a seus valores de mercado.

Dessa forma, os investidores só deveriam tomar uma única decisão de alocação, que é determinar a fração α de seu patrimônio que será destinada ao *portfolio* de mercado, ficando a fração $(1 - \alpha)$ aplicada no ativo livre de risco. Agindo assim, estariam escolhendo *portfolios* posicionados sobre a semi reta $\overrightarrow{FM}$ da **Figura 3.3**, que é conhecida por reta do mercado de capitais. Esta decisão seria tomada em função da quantidade de risco que cada investidor estaria disposto a correr para obter um dado retorno esperado. Essa relação é a aversão a risco do investidor, a qual entraremos em maiores detalhes na próxima seção. Portanto, o retorno esperado para a carteira é dado por:

$$r_p = \alpha r_M + (1 - \alpha) r_f \quad (3.5)$$

onde r_M é o retorno do *portfolio* de mercado e r_f é o retorno do ativo livre de risco.

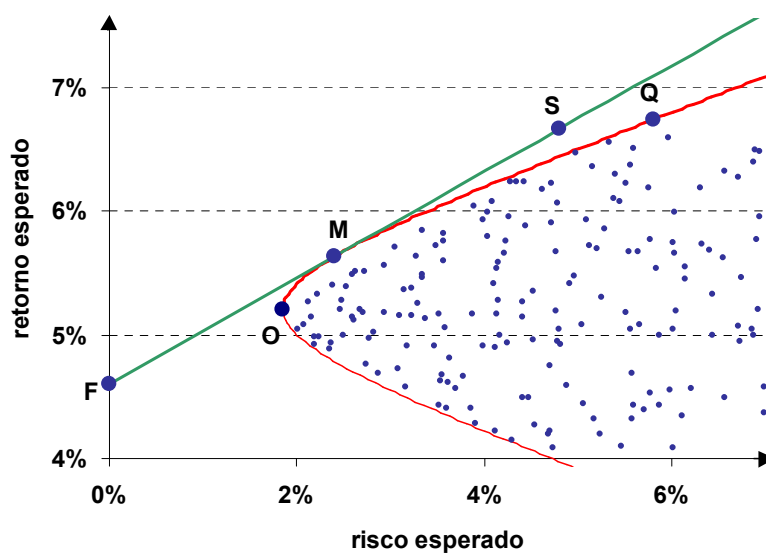


Figura 3.3 – O CAPM e a reta do mercado de capitais (SML).

Conseqüentemente, a principal contribuição do CAPM à modelagem a ser apresentada adiante é de não ser mais necessária a definição de alocação entre todos os ativos disponíveis na economia, mas sim, somente entre o ativo livre de risco e o *portfolio* de mercado. Na seção 3.3 será introduzido o conceito de utilidade, através do qual se pretende quantificar o grau de aversão ao risco do investidor, relacionando-o matematicamente à decisão de alocação α .

3.3 Utilidade como função objetivo

A maioria dos modelos de otimização em finanças existentes na literatura utiliza o conceito de utilidade para definir a função objetivo. Utilidade é uma medida de satisfação, obtida em função de um conjunto de variáveis (CAMPBELL; VICEIRA, 2001). No caso dos problemas de planejamento financeiro, é comum assumir que a fonte de satisfação de um indivíduo provém do nível de consumo que este é capaz de realizar ao longo da vida. O principal recurso que pode ser convertido em consumo é a riqueza, portanto, estes modelos buscam maximizar a expectativa de utilidade futura do investidor sobre a riqueza acumulada ou, até mesmo, sobre o consumo que o indivíduo será capaz de auferir. Matematicamente, essas afirmações podem ser escritas das seguintes formas:

Modelo A

ou

Modelo B

$$\max E_0(U(W_1))$$

$$\max U(C_0) + E_0(U(C_1))$$

s.a.

s.a.

$$W_1 = W_0 [\alpha r_M + (1 - \alpha) r_f]$$

$$W_1 = (W_0 - C_0) [\alpha r_M + (1 - \alpha) r_f]$$

$$C_1 = W_1$$

Onde

W_0 e W_1 são as riquezas (em unidades monetárias) do investidor nos instantes inicial ($t = 0$) e final ($t = 1$). Ambos são parâmetros dos modelos;

C_0 e C_1 são os consumos (em unidades monetárias) do investidor nos instantes inicial ($t=0$) e final ($t=1$). Ambos, juntos com a decisão de alocação α , representam as variáveis dos modelos. As variáveis de consumo só estão presentes no **Modelo B**.

$U(\cdot)$ é a utilidade proveniente de uma dada riqueza ou consumo;

E_0 é a esperança no instante inicial (em $t=0$) da utilidade a ser obtida da riqueza ou do consumo no instante seguinte ($t=1$).

Observar que, a riqueza W_0 que não é consumida no instante inicial (em $t=0$), será, conseqüentemente, poupada para o instante seguinte ($t=1$). O seu valor será corrigido pelo retorno obtido no investimento realizado que, segundo o CAPM, deve ser feito parte na carteira de mercado e parte no ativo livre de risco, obtendo-se assim uma rentabilidade segundo a equação (3.5).

O **Modelo A** é bastante simples, e apresentamos somente para facilitar a compreensão dos conceitos de utilidade e da relação temporal entre o instante inicial e o final. Entretanto, é no modelo de utilidade definida sobre o consumo (**Modelo B**) que está o maior avanço deste tipo de abordagem. Cabe destacar neste momento algumas características importantes do segundo modelo. Primeiramente, toda a riqueza poupada do instante $t=0$ para o instante $t=1$ será consumida em $t=1$. A segunda, e a mais relevante, é que na resolução deste modelo se obtém além da política ótima de investimento do fundo (α_t), a política ótima de contribuição do participante, dada por $(W_0 - C_0)$.

Analisaremos agora alguns aspectos qualitativos importantes da utilidade dos investidores, relacionando-os com as características quantitativas da expressão matemática da função utilidade. Para tal, utilizaremos o conceito de utilidade definida sobre a riqueza, cujos resultados podem ser aplicados de maneira análoga à utilidade definida sobre o consumo.

De forma geral, os investidores são avessos ao risco e essa característica implica numa função utilidade com concavidade negativa, ou em outras palavras, em uma função cuja segunda derivada seja menor do que zero. Essa afirmação está ilustrada na **Figura 3.4** e pode ser compreendida melhor através do exemplo a seguir: a um investidor, que tem uma riqueza inicial W_0 , é oferecido um jogo com igual probabilidade de ganhar ou perder uma quantia G . Esse apostador deve decidir entre participar ou não no jogo. O retorno esperado para ambos os casos é o mesmo, ou seja, zero. A expectativa de utilidade sobre a sua riqueza no instante seguinte (W_1) pode ser calculada para cada uma das possibilidades de decisão:

- não aceitando a aposta:

$$E(U(W_1)) = U(W_1) = U(W_0)$$

- aceitando a aposta:

$$E(U(W_1)) = \frac{1}{2}U(W_1^{\text{ganhador}}) + \frac{1}{2}U(W_1^{\text{perdedor}}) = \frac{1}{2}U(W_0 + G) + \frac{1}{2}U(W_0 - G)$$

Se a função utilidade do investidor apresentar concavidade negativa, $U(W_0)$ será maior do que $\frac{1}{2}U(W_0 + G) + \frac{1}{2}U(W_0 - G)$. Conseqüentemente, o investidor rejeitará a aposta, pois ela acrescenta risco sem acompanhar um devido prêmio, não sendo atrativa a alguém que é avesso ao risco. Isso significa que este investidor tem uma utilidade marginal decrescente com o aumento de sua riqueza.

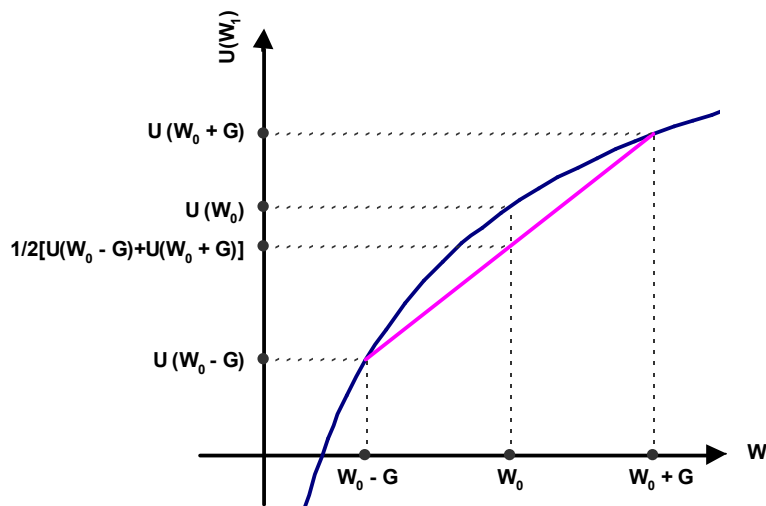


Figura 3.4 – A função de utilidade do investidor.

Se a utilidade marginal for constante com a riqueza (a função utilidade é uma reta), o investidor é indiferente ao risco, podendo aceitar ou não a aposta. Caso a função utilidade seja uma curva convexa, este é propenso ao risco e aceitará o jogo.

É natural aceitar a hipótese de que os investidores são avessos ao risco, com o grau de curvatura da função utilidade determinando a intensidade desta aversão. Existem mais dois conceitos importantes a se considerar na escolha da função utilidade, que são os coeficientes de aversão a risco absoluto e relativo (GOLLIER, 2001 *apud* CAMPBELL; VICEIRA, 2001).

Uma função com concavidade negativa, cujos coeficientes de aversão absoluto e relativo atendem às noções intuitivas do comportamento humano, é a utilidade potencial, que pode ser definida matematicamente, tanto em função da riqueza, quanto do consumo, da seguinte forma:

$$U(z) = \frac{z^{(1-\gamma)} - 1}{1-\gamma} \quad (3.6)$$

Onde $\gamma > 1$ é o coeficiente de aversão ao risco relativo.

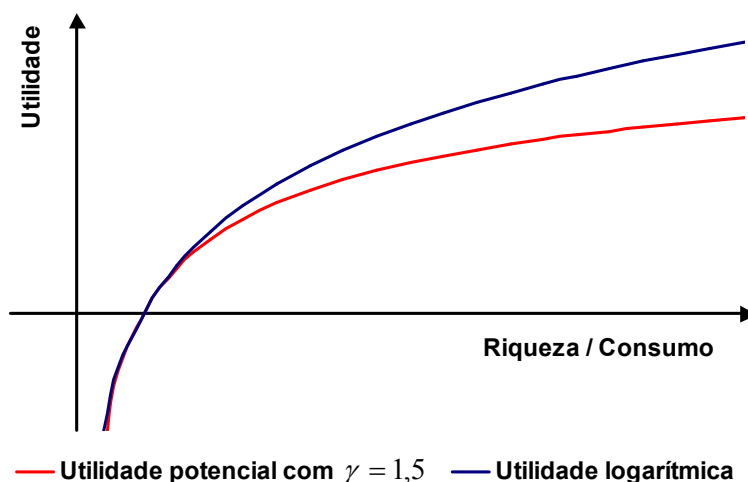


Figura 3.5 – Utilidade potencial e utilidade logarítmica.

No limite, com $\gamma \rightarrow 1^+$, a utilidade potencial converge para a utilidade logarítmica $U(z) = \ln(z)$ ¹. No gráfico da **Figura 3.5**, pode-se observar o formato da curva de utilidade potencial, bem como a sensibilidade do grau de concavidade da função ao parâmetro γ .

Os conceitos de CAPM e utilidade que foram apresentados até então são largamente difundidos e aceitos pela comunidade científica e pelas empresas de administração de recursos, fundamentando a maioria dos modelos utilizados na determinação da política ótima de investimentos de um indivíduo. Entretanto, estes modelos não consideram pontos importantes do processo de tomada de decisão de um poupador de longo prazo, como por exemplo, o efeito da perspectiva de evolução de sua renda ou de suas necessidades financeiras quando aposentado. Outra debilidade destes modelos é focalizarem apenas na decisão de alocação a ser tomada para o próximo período, e mesmo quando abordados em um horizonte mais longo conduzem a resultados análogos.

Com base nisso, que ao longo das próximas seções apresentaremos o modelo matemático multi-período de otimização estocástica que foi desenvolvido levando-se em consideração o ciclo de vida do investidor, com o objetivo de determinarmos a sua decisão de alocação ótima entre o ativo livre de risco e o *portfolio* de mercado para o longo prazo.

3.4 O ciclo de vida do investidor e sua riqueza intrínseca.

Na maioria dos modelos de otimização de carteiras, os investidores têm a sua disposição os ativos financeiros (ações, títulos públicos) e reais (imóveis, jóias) existentes na economia, podendo transacioná-los conforme sua vontade, comprando-os ou vendendo-os livremente, constituindo assim sua riqueza. Essa afirmação é

¹ Campbell; Viceira (2001).

bastante razoável para alguns investidores institucionais ou para as pessoas que já estão aposentadas, entretanto, não é tão realista para indivíduos que ainda trabalham e pretendem poupar para a aposentadoria. Estes investidores têm sua riqueza total composta por duas classes totalmente distintas de ativos: os negociáveis e os não-negociáveis.

Entre os negociáveis estão os dois grupos de ativos apresentados no início desta seção, que juntos, integram o que será chamado de riqueza financeira do indivíduo. Em outras palavras, todos os bens, imóveis ou cotas de fundos de investimento adquiridos pelo investidor constituirão seu patrimônio financeiro.

Já o grupo dos ativos não-negociáveis irá compor a chamada riqueza intrínseca do indivíduo¹. O exemplo mais claro de um ativo deste tipo é o valor produtivo de uma certa pessoa, que pode ser expresso em unidades monetárias. O valor produtivo é o fluxo de caixa descontado a valor presente de toda a renda de trabalho futura desta pessoa. O conceito pode ser interpretado da mesma forma que o valor de uma ação de uma empresa qualquer, onde este é resultado de um fluxo de caixa de dividendos futuros trazidos a valor presente². A diferença básica entre os dois é que, por razões legais e de outras naturezas, o valor produtivo não pode ser negociado. Para que tal operação pudesse ocorrer, seria necessário algo parecido com uma securitização dos recebíveis³ salariais futuros do indivíduo. Isso não faz muito sentido, uma vez que o colocaria em um certo regime de escravidão, pois este seria obrigado a trabalhar para entregar a receita de seu trabalho ao comprador dos

¹ Nota: na bibliografia internacional, a riqueza financeira e a riqueza intrínseca do indivíduo são conhecidas por *financial wealth* e *human wealth*, respectivamente.

² Em Gitman (2002) há maiores informações sobre a análise do preço de uma ação e de ferramentas de engenharia econômica como o valor presente de um fluxo de caixa.

³ Uma operação de securitização de recebíveis permite que uma empresa capte recursos através de uma emissão de títulos de longo prazo. Esses títulos são lastreados em créditos que o emissor tem a receber, originários de vendas a prazo de bens, serviços ou operações imobiliárias. Fortuna (1999) apresenta mais detalhes desta operação.

títulos emitidos. Outro problema é que este não teria mais motivação nenhuma em trabalhar, uma vez que já recebeu toda sua renda futura hoje.

Conforme apresentado por Campbell; Viceira (2001), uma exploração inicial da importância da riqueza intrínseca do investidor seria a seguinte: admita que o fluxo de caixa salarial do indivíduo seja certo e livre de risco. Dado que este não pode vender o seu estoque de valor produtivo, parte do seu patrimônio total já está obrigatoriamente aplicada nesse ativo, que, por hipótese, é livre de risco. Intuitivamente, isso possibilitaria uma alocação maior de sua riqueza financeira no *portfolio* de mercado.

Se esse valor produtivo apresentar algum risco, porém não correlacionado com o risco de mercado, a alocação em ativos de risco continua a ser maior do que em modelos tradicionais. Tal resposta é decorrente do efeito de diversificação. À medida que o risco envolvido no valor produtivo do indivíduo ou sua correlação com o *portfolio* de mercado aumentam, a alocação dentro da riqueza financeira tende a se deslocar para o ativo livre de risco.

Outro aspecto a se considerar, é que, com o passar do tempo, o valor produtivo vai sendo disponibilizado através da remuneração do trabalho realizado, podendo assim ser consumido ou poupado (através da compra de ativos financeiros ou reais, regressando ao patrimônio do indivíduo, mas agora na forma de riqueza financeira).

Como se pode perceber, a riqueza intrínseca do indivíduo é uma variável de suma relevância para as decisões de investimento, o que a torna imprescindível em um modelo que visa obter uma política ótima de alocação de recursos para o longo prazo. Passemos então à descrição detalhada do modelo desenvolvido.

3.5 Definição da estrutura do modelo de otimização.

Baseado no CAPM, na teoria de utilidade e no conceito de riqueza intrínseca, o objetivo do modelo será de maximizar a expectativa de utilidade futura do investidor, que por sua vez é decorrente de um fluxo de decisões de consumo ao longo da vida. Com base nessas decisões de consumo, será possível determinar a política de contribuição ao fundo de pensão, que é um dos objetivos apontados no início deste capítulo. Paralelamente às decisões de consumo, o investidor deverá tomar decisões de alocação do patrimônio financeiro disponível ao final de cada período segundo o CAPM.

O modelo desenvolvido faz uma abordagem multi-estágio do processo de investimento, por isso é muito importante, antes mesmo da determinação das variáveis, a definição dos diferentes estados. O parâmetro de distinção entre os estados é o tempo (medido em anos), ou mais especificamente, a idade do investidor. O estado inicial é representado por $t = t_o$, que é a idade do indivíduo hoje. Para simplificar o modelo, será definido um estado final $t = T$, que é a idade máxima que este pode chegar a viver. Faz-se necessária a definição de T pois assim o horizonte do modelo torna-se finito. O número de estados do modelo varia de investidor para investidor, uma vez que este é dado pela subtração T (fixo para todos os investidores) menos t_o (específico a cada um), entretanto, o estado final é o mesmo para todos.

Uma vez definida a estrutura de estados do modelo, devemos partir para a definição de suas variáveis. Como o modelo de otimização desenvolvido é baseado no **Modelo B** apresentado na seção 3.3, suas variáveis são as mesmas, só que agora sob uma ótica multi-período. Assim, estas são definidas da seguinte forma:

C_t - consumo do indivíduo na idade t , com $t = \{t_o, t_1, \dots, T\}$. Através de C_t pode-se determinar a contribuição do participante ao fundo em cada ano da sua vida.

α_t - decisão de alocação tomada na idade t , com $t = \{t_o, t_1, \dots, T\}$. Os valores de α_t representam a fração dos recursos disponíveis que será alocada no *portfolio* de mercado.

Portanto, para cada estado t , haverá um par de variáveis (C_t, α_t) . Essa notação será bastante usada ao longo deste trabalho.

O próximo passo é a elaboração da função objetivo, que será definida com base na função de utilidade potencial sobre o consumo apresentada na seção 3.3. A utilidade total do investidor é dada pela seguinte equação:

$$\frac{C_{t_0}^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} + E_{t_0} \left[\sum_{i=1}^{T-t_0} \left(\delta^i \left(\prod_{j=0}^{i-1} p_{t_0+j} \right) \frac{C_{t_0+i}^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} \right) \right] \quad (3.7)$$

Onde os parâmetros do modelo são os seguintes:

γ é o parâmetro de aversão a risco relativa. Quanto maior γ , mais conservador é o investidor;

p_t é a probabilidade do indivíduo estar vivo no instante $t+1$, condicionada a ele estar vivo em t . A produtória $\prod_{j=0}^{i-1} p_{t_0+j}$ deve ser entendida como a probabilidade dele estar vivo daqui a i anos, dado que está vivo hoje (em $t = t_0$);

δ é o fator de desconto temporal, sendo $\delta \leq 1$. Um determinado valor VF , cujo prazo de vencimento seja apenas a i períodos da data de hoje, ao ser multiplicado δ^i traz este valor futuro à valor presente.

E_{t_0} é a esperança hoje das utilidades obtidas através de cada uma das decisões de consumo futuras. Essas utilidades são trazidas a valor presente pelo parâmetro δ elevado ao prazo de cada decisão e corrigida pela probabilidade do indivíduo viver até lá.

Percebemos que a equação (3.7) é composta por duas parcelas; a primeira é a utilidade baseada em uma decisão de consumo a ser tomada hoje (em $t = t_0$), em que os estados das variáveis aleatórias já são conhecidos. A segunda é a expectativa hoje de utilidade das decisões de consumo a serem feitas no futuro ($t > t_0$).

O objetivo do modelo então é de maximizar a utilidade total do investidor dado pela expressão (3.7) em todo $\{(C_t, \alpha_t)\}_{t=t_0}^T$, sujeito as restrições que serão apresentadas logo a seguir.

Os diferentes estados do modelo estão relacionados através de um grupo de restrições chamado de restrições orçamentárias, dadas pela expressão:

$$W_{t+1} = r_t^P (W_t + l_t - C_t) \quad \text{para todo } t = \{t_0, t_1, \dots, T-1\} \quad (3.8)$$

Onde:

W_{t+1} e W_t são variáveis endógenas do modelo que representam para todo $t = \{t_1, t_2, \dots, T\}$ as riquezas financeiras totais do investidor, disponíveis no início dos estados $t+1$ e t respectivamente. Em $t = t_0$, W_{t_0} é um parâmetro do modelo, significando a riqueza inicial do investidor.

l_t é o salário recebido pelo indivíduo no ano t , com $t = \{t_1, t_2, \dots, T\}$. Em $t = t_0$, l_0 um outro parâmetro do modelo, representando seu salário atual;

r_t^P é a rentabilidade efetivamente obtida pelo investidor através do *portfolio* no qual seus recursos foram aplicados entre os períodos t e $t+1$. para todo $t = \{t_0, t_1, \dots, T-1\}$

As variáveis l_t e r_t^P são as variáveis aleatórias do modelo, sendo que apresentaremos a descrição em detalhe dos processos estocásticos que as governam na próxima seção.

As restrições orçamentárias são as restrições mais importantes do modelo, uma vez que ditam todo seu comportamento. Elas podem ser entendidas qualitativamente da seguinte maneira: no início de um estado t qualquer, o indivíduo sabe que já tem acumulada uma riqueza financeira W_t . Ele espera também, ao longo desse ano, receber um salário l_t que é a liberação dos recursos que estavam compulsoriamente investidos na sua riqueza intrínseca. Desse total de recursos

disponíveis, ele deve tomar uma decisão de consumir uma determinada quantia C_t , sendo que o restante será poupado, representado a contribuição que este faz ao fundo de pensão. Esse valor poupado, é remunerado pelo retorno do investimento da carteira do fundo, dado por r_t^P . Como veremos logo a seguir, a segunda variável do modelo (α_t) está implicitamente presente em r_t^P .

O comportamento do modelo pode ser entendido intuitivamente da seguinte forma. O objetivo do investidor é maximizar a sua utilidade, que de acordo com as características da função objetivo pode ser obtido ao se maximizar o consumo. Entretanto, o investidor deve decidir entre consumir sua riqueza hoje ou poupar, com a expectativa de poder consumir mais no futuro. Quanto mais ele consumir hoje, menos estará contribuindo para sua poupança. O modelo age segundo esse princípio, buscando determinar qual é o valor máximo que o investidor pode consumir hoje (ou seja, qual é a mínima contribuição que este deve fazer à sua poupança/fundo de pensão) de tal forma que o consumo (utilidade) ao longo de sua vida toda seja máximo(a), logicamente, levando em consideração os riscos envolvidos neste processo.

Além das restrições orçamentárias, são necessárias as restrições de não negatividade das riquezas iniciais de cada estado W_t , isso porque não será permitido no modelo que o investidor apresente patrimônio negativo em nenhum ano da sua vida. Apesar disso ser possível no mundo real, consideramos não adequada tal postura quando se pretende elaborar uma política de investimento de longo prazo cujo objetivo seja a aposentadoria com manutenção do padrão de consumo que o indivíduo tinha antes de se aposentar. Dessa maneira:

$$W_t \geq 0 \quad \text{para todo } t = \{t_1, t_2, \dots, T\} \quad (3.9)$$

Lembrar que W_0 é parâmetro do modelo, representado o patrimônio atual do investidor.

Também não serão permitidas alavancagens financeiras. Esse fenômeno ocorre quando o investidor aloca mais de 100% do seu patrimônio em um determinado tipo de ativo. Isso seria possível, se por exemplo, o investidor toma-se dinheiro emprestado vendendo posições do ativo livre de risco (pagando a taxa de retorno deste investimento a fins de juros), para com esse montante comprar mais do *portfolio* de mercado. Agindo dessa forma, o investidor estaria escolhendo carteiras sobre a semi-reta $\overrightarrow{MS}$ do gráfico da **Figura 3.3**. Em outras palavras, em todos os períodos de análise, só serão permitidas posições no segmento $\overline{FM}$, ou seja:

$$\alpha_t \in [0,1] \text{ para todo } t = \{t_0, t_1, \dots, T\} \quad (3.10)$$

E por fim, resta a restrição de não negatividade das variáveis de consumo para todos os períodos do modelo:

$$C_t \geq 0 \text{ para todo } t = \{t_0, t_1, \dots, T\} \quad (3.11)$$

Agora que já foram apresentadas todas as restrições do modelo, entraremos em maiores sobre o processo estocástico que rege o comportamento das variáveis aleatórias l_t e r_t^P .

3.6 Descrição detalhada dos processos estocásticos.

Na modelagem das incertezas quanto ao futuro, podemos dizer que a aleatoriedade do modelo decorre da presença de duas variáveis cujos comportamentos não seguem um cenário determinístico. A primeira é o retorno da carteira de mercado, e a segunda é o valor produtivo do indivíduo, devido ao risco de não recebimento de salários futuros.

Segundo a teoria do CAPM, o investidor deve aplicar seus recursos em um *portfolio* composto por apenas dois ativos, obtendo uma rentabilidade esperada

segundo a equação (3.5). Entretanto, para o modelo, a componente r_m desta equação (que é o retorno do *portfolio* de mercado) é uma variável aleatória, cujo comportamento ao longo do tempo será descrito da seguinte forma:

$$r_t^m = r^f + \mu + \eta_t \quad (3.12)$$

onde:

r_t^m é o retorno da carteira de mercado no instante t ;

r^f é a taxa de retorno do ativo livre de risco da economia, suposta constante ao longo do tempo.

μ é uma constante que representa o prêmio de risco de mercado do CAPM.

η_t é um choque aleatório ao prêmio de risco no instante t . As variáveis aleatórias η_t são distribuídas identicamente e são independentes ao longo do tempo, segundo uma distribuição normal de média zero e desvio padrão constante σ_η . Pode ser entendida como a volatilidade do prêmio de risco. Portanto, para qualquer t ,

$$\eta_t = N(0, \sigma_\eta^2)$$

A modelagem apresentada para o retorno do *portfolio* de mercado está fundamentada na hipótese de seu preço descrever um passeio aleatório conhecido como Movimento Browniano¹, cuja evolução ao longo do tempo pode ser visualizada na **Figura 3.6**.

¹Essa hipótese é assumida pela maioria dos modelos de precificação de ativos e derivativos. No Capítulo 10 de Hull (1997) é feita uma abordagem profunda sobre os modelos de comportamento de preços de ativos no tempo.

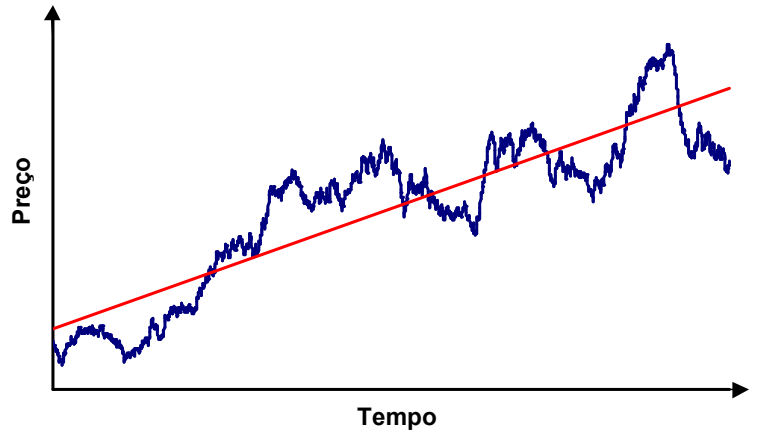


Figura 3.6 – Movimento Browniano do valor do *portfolio* de mercado.

A partir dessa hipótese, pode-se demonstrar que a carteira do investidor também descreverá um passeio aleatório, com seu retorno dado pela seguinte expressão:

$$r_t^P = \alpha_t r_t^m + (1 - \alpha_t) r^f = \alpha_t (\mu + \eta_t) + r^f \quad (3.13)$$

Voltando-se à discussão acerca das restrições orçamentárias apresentada anteriormente, está explicado como a decisão de alocação (α_t), que é uma das duas variáveis fundamentais do modelo, impacta a relação entre os diferentes estados W_{t+1} e W_t , o que intuitivamente seria de se esperar.

A segunda variável aleatória presente no modelo é a receita salarial do indivíduo. Existem diferentes maneiras de se modelar sua evolução ao longo do tempo. Campbell; Viceira (2001) apresentam uma bastante sofisticada, supondo que a renda está sujeita a choques aleatórios transitórios e permanentes, criando assim uma relação de dependência intertemporal. Essa modelagem é bastante complexa, sendo que sua adoção aumenta significativamente o esforço computacional de resolução. Outra desvantagem, é que o modelo de Campbell; Viceira (2001) é bastante razoável para o mercado de trabalho norte americano, que tem regras trabalhistas mais flexíveis que as brasileiras e conta com um sistema público de auxílio desemprego mais sólido. Este modelo, por exemplo, não considera a hipótese

do trabalhador obter subitamente uma renda próxima a zero em um determinado ano de sua vida (por ter ficado alguns meses desempregado), o que não é o caso de um assalariado brasileiro.

Como neste trabalho o objetivo de se utilizar uma abordagem estocástica para a renda do indivíduo é apenas associar um risco a essa variável, desenvolvemos uma modelagem mais simples de sua evolução, mas que ao mesmo tempo, parece bastante razoável para o mercado de trabalho brasileiro.

Admitamos que, a cada ano t de sua vida, o indivíduo espera obter uma dada receita salarial L_t . Essa renda esperada é um parâmetro externo do modelo, podendo ser determinado através de uma política de carreira específica de cada empresa, ou, para simplificar, segundo um modelo de crescimento salarial constante qualquer. Entretanto, pode ocorrer que esta renda não seja recebida em um determinado ano t , em virtude de condições imprevisíveis do mercado de trabalho, que impliquem, por exemplo, na demissão do funcionário.

Assim sendo, a receita salarial l_t efetivamente recebida pelo indivíduo a cada ano t , pode apresentar dois valores distintos:

1º caso – o indivíduo fica desempregado, recebendo apenas uma fração φ do salário inicialmente esperado. φ é um parâmetro do modelo, que representa a fração de ano que as pessoas levam em média para encontrar um novo emprego. φ também pode ser ajustado, para que a receita recebida decorrente de direitos trabalhistas ou do FGTS seja levada em consideração. Desta forma, l_t assume o valor equivalente a $l_t = \varphi L_t$;

2º cenário – o indivíduo permanece empregado e recebe o salário esperado no valor de L_t , ou seja, $l_t = L_t$

Seja $p_{v,t}$ a probabilidade de ocorrência do segundo cenário no ano t , ou em outras palavras, a probabilidade do indivíduo permanecer empregado no ano corrente quando este estiver com t anos de idade. Os valores $p_{v,t}$ são, para todo $t = \{t_0, t_1, \dots, T\}$, parâmetros exógenos do modelo. Não confundir com a probabilidade do indivíduo estar vivo em $t+1$, dado que este está vivo em t , que é dada por p_t .

As **Figuras 3.7 e 3.8** ilustram uma possível dinâmica da receita salarial para dois indivíduos A e B de mesma idade segundo o modelo desenvolvido, admitindo-se planos de carreira diferentes para cada um. Para o indivíduo A foi adotado um modelo de crescimento salarial constante e $p_{v,t}$ igual a 0,9 para todo $t = \{t_0, t_1, \dots, T\}$. O indivíduo B , tem uma perspectiva mais agressiva de evolução profissional, contudo apresenta uma probabilidade de permanência no emprego menor. Para ambos os casos, $\varphi = 0,4$. Como se pode perceber, o risco do valor produtivo do indivíduo B é superior ao do indivíduo A .

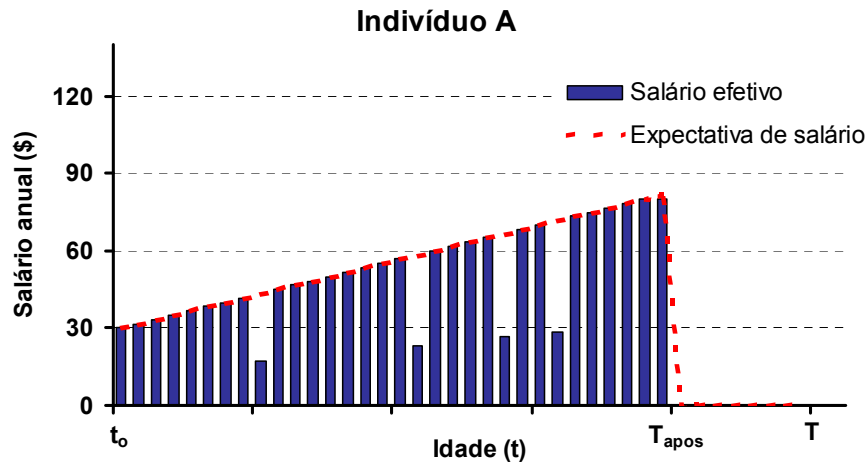


Figura 3.7 – Evolução salarial do indivíduo A .

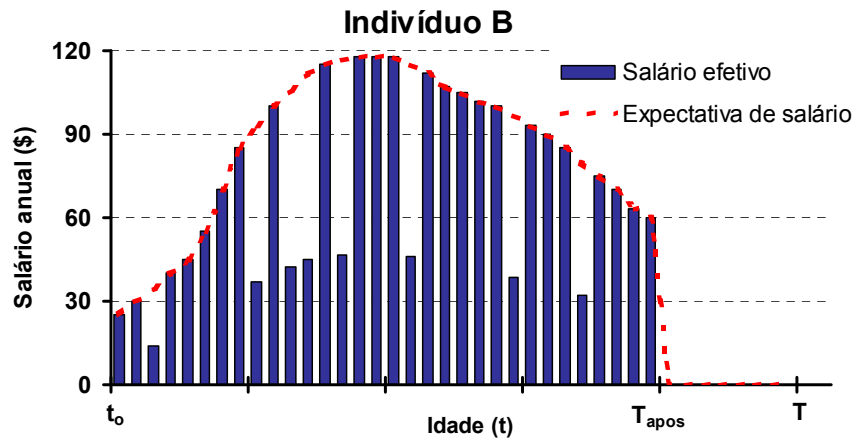


Figura 3.8 – Evolução salarial do indivíduo B.

Portanto, o processo estocástico que governa o comportamento da variável l_t pode ser escrito da seguinte forma:

$$l_t = \nu_t L_t + (1 - \nu_t) \phi L_t \quad (3.14)$$

Onde

L_t é o valor esperado do recebível salarial no ano t , admitindo-se uma trajetória certa e determinística de evolução profissional do indivíduo. Para a sua determinação, podem ser adotados modelos de crescimento constante de salários, ou dependendo do plano de carreira da empresa, algum outro modelo.

ν_t representa um choque aleatório à receita salarial no instante t . ν_t são variáveis aleatórias do tipo Bernoulli distribuídas identicamente, e são independentes ao longo do tempo, assumindo para todo $t = \{t_1, t_2, \dots, T\}$ valor 1 com probabilidade $p_{\nu,t}$ e zero com probabilidade $1 - p_{\nu,t}$.

Como se pode perceber na equação (3.14), não há nenhuma relação intertemporal entre os salários em t e os salários em $t+1$, ou seja, segundo o modelo desenvolvido, o fato do indivíduo ter sido demitido em um determinado ano t , não implica em nada se ele continuará demitido ou será re-contratado no ano seguinte.

Uma outra observação importante a ser feita é que, conforme o modelo foi concebido, este pode levar em consideração tanto a fase de acumulação de riquezas, a qual o investidor ainda está na ativa, trabalhando e convertendo riqueza intrínseca em consumo mais riqueza financeira, quanto o período de aposentadoria. A idade de aposentaria é uma variável exógena ao modelo, sendo que a única restrição é que esta seja menor do que T . Nas **Figuras 3.7 e 3.8**, esta idade é representada pela letra T_{apos} . A diferenciação entre ambas as fases pode ser feita simplesmente através dos parâmetros L_t e $p_{v,t}$, ao atribuir-lhes valores iguais a zero para $t > S$. Aprofundaremos essa discussão no Capítulo 4, onde será abordada como as diferentes configurações destes parâmetros podem refletir distintas situações reais da vida do indivíduo.

Uma vantagem desta modelagem é que, ao desprezar a dependência intertemporal de choques no salário do indivíduo, a resolução computacional torna-se mais simples. O caráter binomial do comportamento do salário também parece bastante adequado ao mercado brasileiro. Sob um enfoque econométrico, o modelo desenvolvido está longe de ser o ideal para explicar o comportamento dos salários com o tempo, mas este atende seu objetivo principal neste trabalho que é de se considerar um fator de risco associado ao valor produtivo do indivíduo.

Uma característica importante dos processos estocásticos elaborados para as duas variáveis aleatórias é que estes pecam ao ignorar a correlação entre os choques aleatórios η e ν . Essa correlação poderia ser interpretada como uma contração do mercado de trabalho decorrente de uma crise econômica ou analogamente, uma melhoria nas condições de trabalho acompanhada de uma expansão econômica acima da média esperada (um choque positivo em η).

Encerramos então a apresentação do modelo elaborado bem como a descrição do comportamento de suas componentes aleatórias. Na próxima seção trataremos uma síntese do modelo desenvolvido e faremos algumas considerações finais para este capítulo.

3.7 Resumo do modelo desenvolvido e conclusões.

O modelo de otimização estocástica desenvolvido, que visa a obtenção de políticas ótimas de contribuição a um fundo de pensão e alocação de recursos de um indivíduo, é o seguinte:

Encontrar $\{(C_t, \alpha_t)\}_{t=t_0}^T$ tal que,

$$\max \frac{C_{t_0}^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} + E_{t_0} \left[\sum_{i=1}^{T-t_0} \delta^i \left(\prod_{j=0}^{i-1} p_{t_0+j} \right) \frac{C_{t_0+i}^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} \right]$$

s.a.:

$$W_{t+1} = r_t^P (W_t + l_t - C_t) \quad \text{para todo } t = \{t_0, t_1, \dots, T-1\}$$

$$r_t^P = \alpha_t (\mu + \eta_t) + r^f \quad \text{para todo } t = \{t_0, t_1, \dots, T-1\}$$

$$l_t = \nu_t L_t + (1 - \nu_t) \phi L_t \quad \text{para todo } t = \{t_0, t_1, \dots, T\}$$

$$W_t \geq 0 \quad \text{para todo } t = \{t_1, t_2, \dots, T\}$$

$$0 \leq \alpha_t \leq 1 \quad \text{para todo } t = \{t_0, t_1, \dots, T\}$$

$$C_t \geq 0 \quad \text{para todo } t = \{t_0, t_1, \dots, T\}$$

As variáveis de decisão são os pares $\{(C_t, \alpha_t)\}_{t=t_0}^T$, e os parâmetros do modelo são os seguintes:

γ : aversão a risco relativa do investidor;

δ : fator de desconto temporal;

p_t : probabilidade do indivíduo estar vivo em $t+1$, dado que este está vivo em t , para todo $t = \{t_0, t_1, \dots, T-1\}$;

W_0 : riqueza inicial do investidor;

r^f : taxa de retorno esperada do ativo livre de risco da economia, suposta constante ao longo do tempo;

μ : prêmio de risco de mercado, suposto constante ao longo do tempo;

σ_η : desvio padrão, suposto constante ao longo do tempo, da distribuição normal de probabilidades dos choques aleatórios η_t com $t = \{t_0, t_1, \dots, T\}$;

L_t : salário que o indivíduo deve receber caso não perca o emprego no ano t , com $t = \{t_0, t_1, \dots, T\}$;

φ : fração da remuneração total esperada em qualquer ano t , que o indivíduo receberá ao invés do salário integral no caso de perda do emprego;

$p_{v,t}$: probabilidade do indivíduo permanecer empregado em t , com $t = \{t_0, t_1, \dots, T\}$. Esta probabilidade rege o comportamento dos choques salariais v_t , que são variáveis do tipo Bernoulli.

Conforme apresentado neste capítulo, o modelo desenvolvido representa um grande avanço da teoria moderna de carteiras, pois considera pontos como a riqueza intrínseca do indivíduo na constituição de carteiras com objetivos de longo prazo. O modelo foi baseado no modelo proposto por Campbell em seus trabalhos¹, sendo que algumas adaptações foram feitas para o mercado brasileiro. Sua resolução numérica foi implementada na linguagem de programação *Perl*, e será descrita em detalhes mais adiante neste trabalho.

Uma vez elaborado um modelo de otimização das decisões de investimento de um indivíduo, daremos sequência no próximo capítulo com uma discussão profunda sobre os métodos de determinação de cada um de seus parâmetros, apresentando as hipóteses assumidas e técnicas empregadas.

¹ Campbell *et. al.* (1999), Campbell *et. al.* (2001), Campbell; Viceira (2001) e Cocco *et. al.* (2001).



DETALHAMENTO DOS PARÂMETROS DO MODELO

CAPÍTULO 4: DETALHAMENTO DOS PARÂMETROS DO MODELO

4.1 Introdução

No Capítulo 3, foi apresentado um modelo de otimização estocástica para a determinação de uma política ótima de poupança de recursos de um indivíduo, que visa maximizar sua satisfação sobre o consumo total que este poderá auferir ao longo de sua vida. São dois os objetivos do modelo. O primeiro é responder à questão clássica de economia das famílias, que é o dilema entre o consumo imediato dos recursos disponíveis ou a poupança destes, na expectativa de se poder consumir mais no futuro. É necessário lembrar que o investidor visa a sua aposentadoria e dessa forma, há uma necessidade mínima de acumulo de riqueza para financiar a fase da vida em que este não estiver mais trabalhando. Os recursos destinados à poupança serão investidos através de contribuições ao fundo de pensão complementar. O segundo objetivo vai mais além, que é, do montante de recursos destinados à poupança, quanto alocar em um ativo de risco e quanto alocar no ativo livre de risco (segundo os princípios do CAPM, apresentados no Capítulo 3), de forma a atender às necessidades de risco e retorno de cada investidor.

Para responder a essas perguntas, o modelo lança mão de alguns parâmetros, que juntos, diferenciam uma pessoa da outra. A determinação correta de cada um destes parâmetros, ou melhor, a mais fidedigna possível às características reais de cada investidor, é fundamental para a acurácia e a confiabilidade do modelo. Existem também parâmetros que regem as incertezas sobre os cenários futuros, sobre os quais as decisões de consumo e alocação serão tomadas. A determinação correta destes parâmetros também se torna importante, pois a análise incorreta das incertezas futuras pode levar a resultados que surpreendam negativamente as expectativas do investidor.

Com base nisso, neste capítulo serão discutidos os processos de obtenção dos seguintes parâmetros do modelo:

- 1) γ - aversão a risco relativa do investidor;
- 2) φ - fração da remuneração total esperada em qualquer ano t , que o indivíduo receberá ao invés do salário integral no caso de perda do emprego;
- 3) L_t - salário esperado que o indivíduo deve receber caso não perca o emprego no ano t , com $t = \{t_0, t_1, \dots, T\}$;
- 4) $p_{v,t}$ - probabilidade do indivíduo permanecer empregado em t , com $t = \{t_0, t_1, \dots, T\}$.
- 5) p_t - probabilidade do indivíduo estar vivo em $t+1$, dado que este está vivo em t , para todo $t = \{t_0, t_1, \dots, T-1\}$
- 6) δ - fator de desconto temporal;
- 7) T - idade máxima do investidor a ser considerada pelo modelo;
- 8) t_o - idade atual do investidor;
- 9) W_0 - riqueza inicial do investidor;
- 10) r^f - taxa de retorno esperada do ativo livre de risco da economia, suposta constante ao longo do tempo;
- 11) μ - prêmio de risco de mercado, suposto constante ao longo do tempo;
- 12) σ_η - desvio padrão, suposto constante ao longo do tempo, da distribuição normal de probabilidades dos choques aleatórios η_t com $t = \{t_0, t_1, \dots, T\}$;

A determinação de alguns destes é relativamente trivial, entretanto outros têm componentes subjetivas ou que dependem de estudos mais detalhados das condições de trabalho no Brasil. Os processos de obtenção que serão discutidos a seguir não são os ideais, o que demandaria um trabalho estatístico bastante profundo que é incompatível com o tempo disponível e com as necessidades do banco.

Na grande maioria das referências bibliográficas consultadas, com o objetivo de realizar a análise de sensibilidade do modelo, os autores meramente adotam valores para cada um dos parâmetros, sem muitas vezes apontar suas verdadeiras formas de obtenção. Isso de certa forma é justificável, pois eles estão focados mais na verificação da qualidade do modelo matemático proposto do que na determinação perfeita de seus parâmetros. Não caberia elaborar estudos muito profundos antes mesmo de se assegurar que o modelo é bom e merece tal esforço (que pode ser bastante custoso, seja via tempo ou até financeiro).

Por essa razão, neste trabalho não desenvolvemos todos os estudos estatísticos necessários para a determinação dos parâmetros. Entretanto, tendo-se em vista que o objetivo final é a efetiva implementação do modelo, dedicamos este capítulo ao encaminhamento de tais estudos, apresentando os principais fatores que podem influenciar nas formas de obtenção destes parâmetros e em sua modelagem temporal. No caso de um destes parâmetros, por exemplo, elaboramos um método qualitativo para a sua determinação. Em outras palavras, discutiremos a interface de entrada do modelo matemático com a realidade.

Na seção 4.2, será abordado um dos principais parâmetros do modelo, que é o coeficiente de aversão a risco γ . Além disso, com base em estudos preliminares introduziremos um novo parâmetro no modelo, que lhe agrega um pouco mais de realismo sem comprometer demais sua velocidade de processamento. Desta forma, será apresentada uma proposta de leve alteração em sua estrutura, para que este na determinação da contribuição ótima do indivíduo ao fundo de pensão considere que as pessoas têm necessidades mínimas de consumo que lhe garantam a subsistência. Essa abordagem parece bastante interessante pelas seguintes razões:

- 1) garante que o modelo não recomende ao indivíduo destinar toda sua receita salarial à poupança nos primeiros anos de análise, ou seja, que ele não consuma absolutamente nada. Nestes anos o investidor apresenta um valor produtivo alto, pois ainda está trabalhando;

2) de forma análoga, pune a função objetivo caso o modelo recomende o indivíduo consumir de imediato toda sua riqueza, comprometendo assim a manutenção de seu padrão de vida após a aposentadoria.

Na seção 4.3 explicitaremos as formas de obtenção dos parâmetros φ , L_t e $p_{v,t}$, que regem o fluxo salarial esperado do indivíduo, bem como os riscos envolvidos na sua riqueza intrínseca. Os parâmetros demográficos ($p_{v,t}$ e T), as hipóteses de mercado do CAPM e o fator de desconto temporal podem ser obtidos de uma forma mais simples, e serão tratados na seção 4.4.

Passemos, então, à discussão a respeito dos métodos de determinação da aversão ao risco do investidor.

4.2 O coeficiente de aversão ao risco.

A aversão a risco é uma característica tipicamente psicológica das pessoas. Por essa razão, sua determinação dificilmente poderá ser feita de forma exata, sendo fortemente influenciada por uma componente subjetiva.

Tradicionalmente, a identificação do perfil de risco do investidor é feita pela figura do planejador financeiro, um profissional altamente qualificado cujo objetivo final é propor a seu cliente sugestões de investimento personalizadas, que atendam seus anseios de risco e retorno esperados. O sucesso de sua função está intimamente ligado ao nível de conhecimento pessoal que este tem de seu cliente, para assim determinar com maior precisão seu perfil de aversão ao risco.

Isso inclui conhecer o cliente e sua família pessoalmente, saber quais são seus objetivos de vida, o que este considera mais importante para o longo prazo, seu comportamento diante de momentos de maior volatilidade nos ativos e seus conhecimentos de mercado, economia e produtos. É de posse de todas essas

informações que o planejador financeiro pode recomendar uma carteira que atenda ao perfil de risco de cada investidor. Atualmente os bancos têm investido recursos nesse tipo de negócio, e um exemplo disso são as áreas de *private banking*.

Entretanto, a manutenção deste tipo de profissional só apresenta alguma vantagem, na relação custo-benefício, quando os recursos do cliente disponíveis para investimento gerarem taxas de administração que cubram os custos dessa estrutura de relacionamento pessoal. Esse não é o caso de um fundo de pensão complementar, que tem um grande número de participantes cada um com pequenos volumes financeiros. Assim sendo, seria inviável economicamente para a fundação ou instituição administradora dedicar profissionais exclusivamente à determinação do perfil de risco de cada um de seus participantes.

Uma vez identificado esse problema, fez-se necessária uma reformulação total da forma de prestação deste serviço, sem que houvesse comprometimento significativo da qualidade da informação obtida. Com base nisso que têm sido desenvolvidos os chamados questionários de determinação do perfil de risco do investidor. Estes questionários são hoje uma das principais ferramentas que as instituições que administram recursos de terceiros utilizam no aconselhamento financeiro de seus clientes de pequeno e médio porte.

A grande diferença entre os dois processos é que, o que antes era uma informação extraída do investidor, agora é uma informação fornecida diretamente por ele. Isso aparenta não causar grandes diferenças, mas existem estudos que demonstram que os investidores, ao preencherem um formulário, tentem a ser mais propensos ao risco do que realmente são (GOLLIER, 2001 *apud* CAMPBELL; VICEIRA, 2001). Desta forma, a lista de perguntas deve ser cuidadosamente elaborada, com o objetivo de obter as respostas mais fieis possíveis à realidade. Esta não pode ser muito extensa, para que o investidor não se desinteresse por seu preenchimento e responda a todas as perguntas de uma maneira séria. Por outro lado, a mesma não pode ser muito curta, para que experiências específicas do investidor acerca de uma determinada pergunta não distorçam o resultado global do

questionário (o que estatisticamente seria a suavização do impacto de um dado considerado *outlier* da amostra).

As perguntas devem abordar os seguintes assuntos:

- 1) **Horizonte de investimento:** a idade do investidor e o tempo que este pretende manter seus recursos investidos influenciam bastante o seu grau de aversão a risco. Pessoas mais velhas tendem a ser mais conservadoras ao realizar apostas financeiras, uma vez que o tempo disponível para a recuperação de eventuais perdas é menor, o que pode comprometer seu padrão de vida na aposentadoria. Apesar do modelo proposto já levar em consideração esses dois efeitos sobre a decisão de investimento, a determinação do coeficiente de aversão a risco deve ser feita de maneira independente, podendo ou não contribuir no mesmo sentido à formulação da estratégia a ser adotada.
 - 2) **Objetivos do investidor:** ao manifestar interesse pelo produto desenvolvido neste trabalho, todos os investidores apresentam o mesmo objetivo, que é de poupar recursos para a aposentadoria, de forma a garantir-lhes a manutenção do mesmo padrão de vida de antes. Em outros casos, os objetivos poderiam ser distintos, como realizar uma pequena e rápida aposta no mercado, poupar para a educação dos filhos, etc. Dentro deste tópico também devem ser abordadas questões como, por exemplo, se o investidor prefere garantir o capital investido ou maximizar sua riqueza sem se importar muito com o risco de perda de parte desta. O número de dependentes também causa um impacto sobre a aversão a risco do indivíduo;
 - 3) **Experiências e conhecimentos de mercado:** investidores que têm maior conhecimento de produtos de investimento e dos fatores que influenciam seus desempenhos podem tomar apostas mais agressivas, o que se reflete em uma propensão a riscos maior. Também pode ajudar na determinação de seu perfil de risco a identificação de hábitos de investimento em alguns produtos diversos, como, por exemplo, se o
-

investidor tem o costume de apostar em jogos de azar (loterias, cavalos, cartas, etc.) ou de contratar seguros (de automóveis, vida, e outros);

- 4) **Comportamento perante o risco:** as reações de cada investidor a situações de perda de capital investido podem variar de um para o outro. Nesta parte do questionário, devem ser propostas algumas situações desfavoráveis a um eventual investimento realizado, para desta forma identificar como o indivíduo se sentiria e qual ação tomaria perante essa perda.

Como a instituição em que este trabalho foi realizado ainda não possuía um questionário deste tipo, compilamos uma lista com 18 perguntas baseada nos aspectos relevantes apresentados acima e no estudo de questionários existentes nas páginas eletrônicas da internet de alguns administradores de recursos de terceiros, tanto brasileiros quanto estrangeiros. O questionário sintetizado classifica os investidores em cinco categorias qualitativas de aversão ao risco. As categorias são as seguintes, em ordem crescente de propensão ao risco:

- a) Defensivo;
- b) Conservador;
- c) Moderado;
- d) Arrojado;
- e) Agressivo.

Este questionário e sua metodologia de apuração de resultados são apresentados no Anexo A.

O próximo passo é relacionar cada uma dessas categorias qualitativas a um valor do parâmetro γ . Para tal, cabe aprofundarmos a discussão iniciada no Capítulo 3, sobre a sensibilidade da curva de utilidade a diferentes níveis de γ , para que se possa assegurar que variações qualitativas de aversão a risco impliquem em variações significativas na utilidade do investidor.

A função de utilidade potencial sobre o consumo é dada pela seguinte equação:

$$U(C) = \frac{C^{(1-\gamma)} - 1}{1-\gamma} \quad (4.1)$$

sendo esta definida para C real, maior do que zero e com o parâmetro γ assumindo valores maiores do que 1. Na **Figura 4.1** e na **Tabela 4.1**, percebe-se que, à medida que o consumo aumenta, as variações na utilidade do investidor tornam-se cada vez menores. Essa característica está de acordo com o esperado, uma vez que os investidores apresentam uma utilidade marginal decrescente com o aumento de seus níveis de consumo¹. Pode-se notar também, que para valores de γ superiores a 2, as variações em $U(C)$ à medida que C aumenta são numericamente imperceptíveis. Ou seja, dependendo do nível de precisão numérica utilizado na resolução do modelo, a função objetivo torna-se uma constante para valores de γ superiores a 2, o que prejudica toda a otimização. Dessa forma, as máximas variações de γ devem estar compreendidas no intervalo entre 1 e 2.

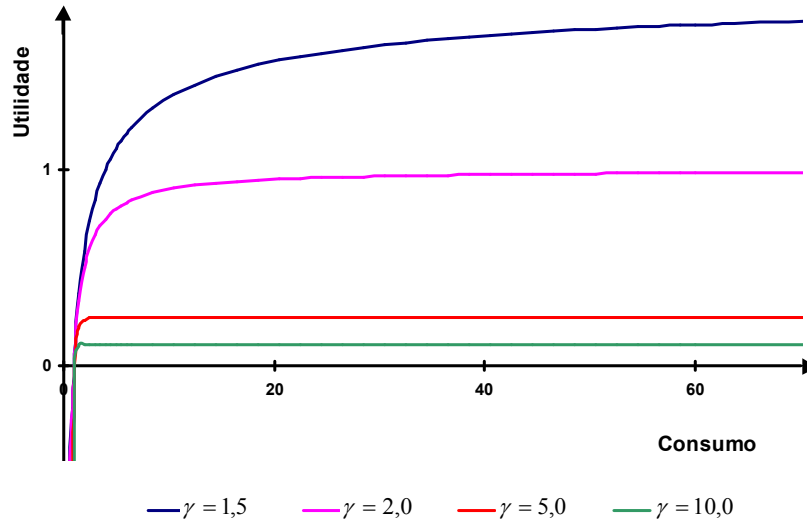


Figura 4.1 – A função de utilidade potencial para diferentes valores do parâmetro γ .

¹ Para indivíduos que têm um nível de consumo relativamente baixo, qualquer incremento torna-se muito mais significativo do que se este tivesse um nível mais alto, uma vez que, no primeiro caso o incremento os possibilita a aquisição de mais produtos de primeira necessidade, que proporcionam utilidade maior se comparada com a proporcionada pelos produtos que serão adquiridos no segundo caso, muitas vezes supérfluos.

Consumo*	Valor da função utilidade para			
	$\gamma = 1,5$	$\gamma = 2,0$	$\gamma = 5,0$	$\gamma = 10,0$
0,5	-0,82843	-1,00000	-3,75000	-56,77778
1	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
2	0,58579	0,50000	0,23438	0,11089
3	0,84530	0,66667	0,24691	0,11111
10	1,31401	0,88235	0,24995	0,11111
100	1,80000	0,99000	0,25000	0,11111
1.000	1,93675	0,99900	0,25000	0,11111
2.000	1,95528	0,99950	0,25000	0,11111
5.000	1,97172	0,99980	0,25000	0,11111

* em milhares de \$

Tabela 4.1 – Valores da função utilidade para diferentes níveis de consumo e diferentes parâmetros γ . A função torna-se numericamente constante para valores de γ superiores a 2.

Assim sendo, e com base no estudo de sensibilidade da solução ótima ao parâmetro γ que será apresentado no Capítulo 5, serão atribuídos para cada um dos perfis de risco do questionário os seguintes valores de γ :

Resultado do questionário	Parâmetro γ
Defensivo	1,93
Conservador	1,70
Moderado	1,40
Arrojado	1,19
Agressivo	1,08

Tabela 4.2 – Parâmetro de aversão a risco de cada perfil.

Avançando um pouco além na análise da função objetivo, ao realizarmos testes preliminares com o modelo, identificamos uma característica interessante da curva de utilidade do investidor, que é o fato desta, independente do parâmetro γ , apresentar valores negativos para níveis de consumo entre 0 e 1. Essa constatação não apresenta nenhuma valia por si só, entretanto, sob a ótica deste modelo de maximização de utilidade pode ser responsável por um efeito bastante útil, que descreveremos nos próximos parágrafos.

Quando, para um certo nível de consumo em um determinado ano, a satisfação incremental deste à satisfação total do indivíduo (dada por todo um fluxo de consumo que o indivíduo tem ao longo da vida) é negativa, esse nível de

consumo estará destruindo o valor agregado pelos demais fluxos à satisfação total. Essa constatação iria contra uma idéia intuitiva que, na pior das hipóteses, ao indivíduo não consumir nada, este não estaria obtendo utilidade alguma. Entretanto, esse efeito passa a fazer sentido se interpretado da seguinte forma: um nível de consumo auferido pelo indivíduo que seja suficientemente baixo, de tal forma que não cubra sequer suas necessidades básicas de subsistência, implica em uma perda de utilidade total acumulada em períodos anteriores, nos quais o consumo foi capaz de atender a essas necessidades.

Esse conceito de consumo mínimo de subsistência que não cause impacto negativo à utilidade total do indivíduo é bastante interessante, e pode ser facilmente observado no mundo real. Situações de pobreza total, ou mesmo quando os indivíduos têm patrimônio acumulado mas não destinam absolutamente nada ao consumo imediato devem ser evitadas pelo modelo, pois fogem totalmente dos objetivos e comportamentos reais dos investidores. A melhor maneira de se fazer isso é aproveitando-se dessa característica da função de utilidade potencial.

Entretanto, da forma como está estruturado o modelo, esse consumo mínimo de subsistência é o mesmo para todos os investidores, e é igual a 1. Devem ser feitas então, algumas alterações no modelo apresentado no Capítulo 3, de tal forma a abordar corretamente esse conceito de consumo de subsistência, ou então eliminá-lo, para que não seja dado o mesmo tratamento a todos os investidores. Optou-se pela adoção da primeira alternativa, uma vez que esta agrega um pouco mais de realismo ao modelo.

Sejam, então, os parâmetros C_t^{subs} os níveis de consumo mínimo de subsistência do indivíduo em cada ano t de sua vida, com $t = \{t_0, t_1, \dots, T\}$. A nova função objetivo do modelo é dada por:

$$\max \frac{\left(\frac{C_{to}}{C_{to}^{subs}} \right)^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} + E_{to} \left[\sum_{i=1}^{T-to} \delta^i \left(\prod_{j=0}^{i-1} p_{to+j} \right) \frac{\left(\frac{C_{to+i}}{C_{to+i}^{subs}} \right)^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} \right] \quad (4.2)$$

Não são necessárias adaptações em nenhuma das restrições do modelo. A única alteração feita então, foi a introdução na função objetivo da divisão de todas as variáveis C_t pelas constantes C_t^{subs} . Desta forma, será maximizada a utilidade total do investidor sobre o montante financeiro consumido medido, não mais em uma unidade monetária, mas sim em proporção ao nível mínimo de subsistência do indivíduo. Se $\frac{C_t}{C_t^{subs}}$ for menor do que 1, o investidor estará consumindo em t menos do que o mínimo necessário, obtendo, assim, uma utilidade negativa sobre este consumo.

A abordagem de um consumo mínimo de subsistência variável com a idade do indivíduo é bastante razoável, pois à medida que as pessoas envelhecem, consolidando provavelmente uma família e elevando seu padrão de vida, é de se esperar que suas necessidades mínimas de consumo também devam aumentar. Outro momento significativo de alteração deste parâmetro seria o ano de aposentadoria do indivíduo. Retornaremos a esse tipo de discussão na próxima seção, onde serão apresentadas algumas hipóteses de modelagem da evolução da renda do indivíduo e como que estas sensibilizam os parâmetros do modelo.

Para concluir a análise apresentada do parâmetro de aversão a risco dos investidores, cabe observar que o questionário compilado neste trabalho tem como único objetivo estimar o perfil de risco de cada pessoa para que se possa implementar e testar o modelo de uma forma preliminar. Existem inúmeros estudos sobre a psicologia dos investidores, e como ela afeta suas decisões de investimento, o que poderia ser tema de um trabalho por si só.

4.3 A evolução salarial do indivíduo

No Capítulo 3, foi apresentada uma modelagem da evolução salarial dos indivíduos que leva em consideração seus respectivos riscos. O modelo proposto parece bastante adequado ao mercado de trabalho brasileiro, que tem regras e restrições diferentes das do mercado americano (nas quais se baseiam todas as referências bibliográficas consultadas), bem como um sistema de seguro desemprego menos desenvolvido. Entretanto, sua principal diferença com relação ao modelo proposto por Campbell; Viceira (2001) é desprezar os efeitos intertemporais dos choques aleatórios ao salário do indivíduo. Ao fazer isso, a resolução do modelo torna-se mais simples do ponto de vista computacional, mas efeitos intuitivos como por exemplo, a probabilidade de decréscimo na renda em um determinado ano estar correlacionada com o indivíduo já ter tido uma perda salarial no ano anterior não são levados em consideração.

Recapitulando então, pela hipótese assumida ao desenvolvermos o modelo¹, o fluxo salarial l_t do indivíduo a cada ano de vida t , com $t = \{t_0, t_1, \dots, T\}$ pode apresentar os seguintes valores, com probabilidades $p_{v,t}$ e $1 - p_{v,t}$ respectivamente:

- 1) $l_t = L_t$. O indivíduo permanece empregado neste ano, e recebe um salário L_t . Este valor é o que ele já esperava receber em t desde o instante inicial do modelo.
- 2) $l_t = \phi L_t$. O indivíduo perde o emprego, recebendo apenas uma fração ϕ do salário esperado. O parâmetro ϕ pode depender do número de semanas que este permanecer desempregado no ano ou de quanto que este teria a receber a títulos de direitos trabalhistas após uma eventual demissão.

¹ Cabe frisar que a adoção de uma abordagem estocástica ao fluxo salarial neste trabalho tem como objetivo apenas introduzir um grau de incerteza quanto ao valor produtivo do indivíduo. Não há nenhuma pretensão em se elaborar um modelo econométrico do comportamento da renda das pessoas ao longo do tempo.

Desta maneira, os parâmetros que devem ser determinados são L_t , φ e $p_{v,t}$, para todo $t = \{t_0, t_1, \dots, T\}$. Os valores de L_t , e $p_{v,t}$ estão mais intimamente relacionados entre si e com a política de evolução profissional de cada empresa. Uma política mais agressiva, por exemplo, apresenta um L_t crescendo com o passar do tempo a uma velocidade maior, entretanto é de se esperar que a probabilidade de permanência no emprego seja menor. Os parâmetros $p_{v,t}$ são também, de uma certa forma, influenciados pelas condições da economia brasileira, podendo aumentar em ciclos de retomada da atividade econômica e cair em momentos de contração do mercado de trabalho. Estas condições somadas à aspectos legais trabalhistas têm também forte influência sobre o parâmetro φ .

Por fim, será aprofundada a discussão acerca dos parâmetros C_t^{subs} iniciada na seção anterior, relacionando-o com a evolução salarial esperada de cada indivíduo. Passemos então às hipóteses que cercam a determinação de cada um destes parâmetros.

Existem diversos fatores que podem influenciar a perspectiva de evolução profissional, ou mais precisamente, a evolução salarial do indivíduo. Neste trabalho levaremos em consideração apenas dois, que são o grau de escolaridade da pessoa e a empresa para a qual trabalha. Cabe destacar também, que demos um maior foco à análise da carreira de indivíduos que são assalariados, pois estes representam o principal público alvo das fundações fechadas de previdência complementar e é a situação de mais de 60% da população economicamente ativa brasileira¹.

Cocco; Gomes; Maenhout (2001) apresentam alguns resultados interessantes constatados pelo Panel Study of Income Dynamics (PSID)², que uma pesquisa

¹ Segundo o Censo 2000, realizado pelo IGBE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística).

² Maiores informações a respeito desta pesquisa, podem ser obtidos no endereço eletrônico <http://psidonline.isr.umich.edu/>.

realizada pela Universidade de Michigan com uma amostra bastante representativa dos cidadãos norte-americanos e de suas famílias desde 1968. Um dos tópicos analisados por essa pesquisa é o efeito do nível de escolaridade sobre evolução salarial dos indivíduos, separando-os em três classes diferentes de formação profissional: acadêmica, colegial e fundamental. Os resultados da pesquisa podem ser observados na **Figura 4.2**.

Percebe-se que indivíduos que completaram apenas os ensinos médio e fundamental começam a apresentar renda antes dos indivíduos de formação acadêmica, o que seria de se esperar, pois os primeiros entram antes no mercado de trabalho. Por outro lado, apesar de muitas vezes iniciarem suas carreiras profissionais ganhando um salário pior do que o de um trabalhador menos qualificado, a renda anual das pessoas com formação acadêmica chega a mais do que quadruplicar ao longo de suas vidas, com um crescimento muito mais acelerado do que o dos indivíduos que não concluíram uma faculdade. Um efeito geral para todas as classes é a queda da renda a partir dos 50 anos.

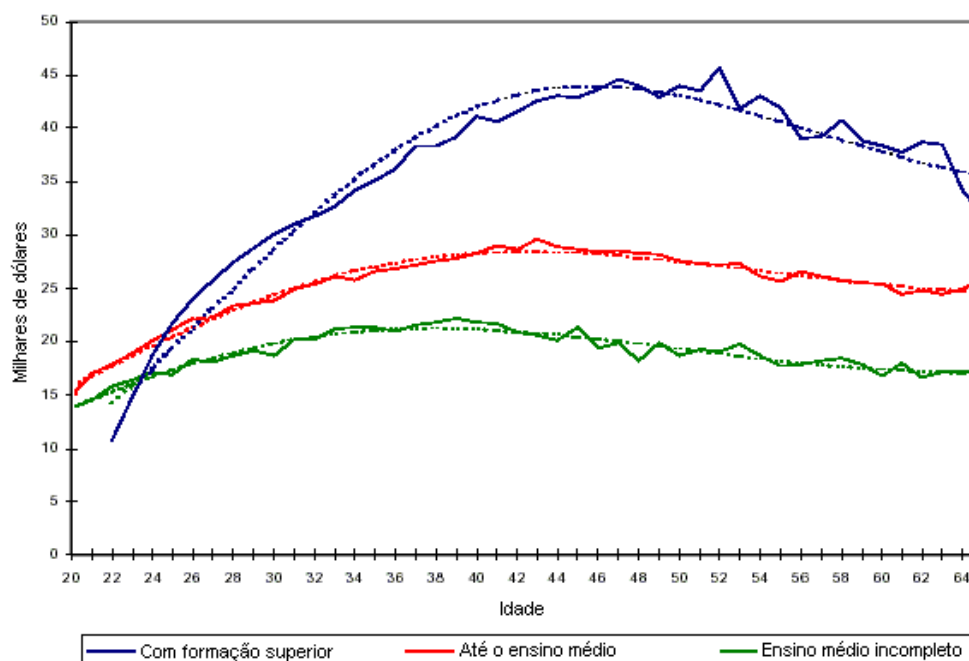


Figura 4.2 – Evolução da renda esperada em função do grau de escolaridade. As linhas tracejadas se referem a suavizações dos dados observados. Fonte: COCCO; GOMES; MAENHOUT, 2001, traduzido pelo autor.

Uma dificuldade existente no Brasil é a ausência de estudos desta natureza sobre o mercado de trabalho local. Porém, quanto à influência do grau de escolaridade, é de se esperar que esses resultados também possam ser observados na população brasileira, feitas apenas algumas ressalvas. A principal delas é o efeito da forte concentração de renda, ou seja, a diferença entre os salários das pessoas mais ricas e o das mais pobres no Brasil deve ser bem superior à observada na **Figura 4.2**. Portanto, o nível de escolaridade é fundamental na determinação dos parâmetros L_t .

A filosofia de recursos humanos da empresa em que o indivíduo trabalha também deve ser levada em conta ao se analisar os parâmetros de sua evolução salarial. Empresas que buscam maior competitividade através da contratação dos melhores profissionais do mercado podem adotar como forma de atraí-los uma política de remuneração total mais agressiva do que as demais empresas, o que sensibiliza diretamente o parâmetro L_t . A remuneração não é a única maneira de se fazer isso. A estabilidade das condições de trabalho é um outro método para se atingir esse objetivo, o que se reflete agora na probabilidade de permanência no emprego $p_{v,t}$. Essas ferramentas de gestão são apresentadas com detalhes em Drucker (1998), sendo que é possível relacionar a grande maioria delas aos parâmetros L_t e $p_{v,t}$ do modelo.

Idealmente, conforme foi apresentado, a determinação dos parâmetros L_t e $p_{v,t}$ deve ser feita através de uma atividade conjunta dos departamentos de recursos humanos da empresa patrocinadora e de análise quantitativa do gestor do fundo de pensão. Entretanto, o nível de relacionamento existente hoje impossibilita que façamos um estudo com tal profundidade, além do que sua elaboração demandaria um tempo incompatível com o disponível, e com os objetivos principais deste trabalho. Posteriormente caberia um estudo de como aperfeiçoar este relacionamento, sem que haja um excessivo aumento nos custos envolvidos.

Desta forma, os únicos dados disponíveis para a determinação dos parâmetros L_t são os salários atuais de cada participante do plano, não se sabendo

hoje nada a respeito de suas perspectivas de evolução. Os níveis de escolaridade também podem ser obtidos com certa facilidade. Assim sendo, serão adotadas duas hipóteses distintas para o desenvolvimento profissional dos indivíduos:

- 1) As pessoas que não têm curso superior, apresentarão uma renda salarial com crescimento constante e igual a 2% ao longo da vida até o momento em que estas se aposentarem. Esse é o modelo básico adotado pela área de cálculo atuarial do banco na determinação das necessidades atuarias dos planos do tipo BD.
- 2) Os funcionários com formação acadêmica apresentarão uma evolução salarial com o mesmo perfil de evolução dos trabalhadores norte-americanos. Adotaremos um crescimento de 7% ao ano até os 50 anos de idade, permanecendo constante desse ponto até a idade de aposentadoria.

As possíveis trajetórias para os parâmetros L_t apresentadas acima podem ser visualizadas na **Figura 4.3**.

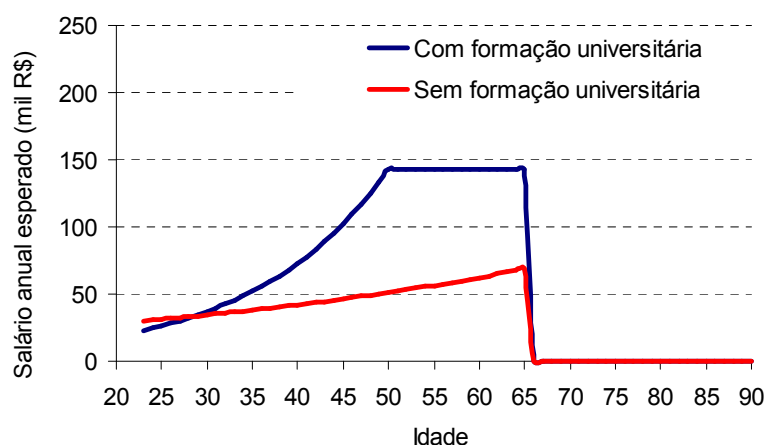


Figura 4.3 – Trajetórias esperadas para o crescimento salarial dos indivíduos com e sem curso universitário completo.

Como não há quase nenhuma informação disponível sobre a política salarial da empresa patrocinadora, torna-se bastante vaga qualquer hipótese acerca dos parâmetros $p_{v,t}$ por esse caminho. Desta forma, sua determinação será dada através das condições do mercado de trabalho brasileiro, bem como sua tendência de equilíbrio no longo prazo. Atualmente, segundo o IBGE (Instituto Brasileiro de

Geografia e Estatística), a taxa de desemprego no Brasil está em 13%, sendo que apenas na região metropolitana de São Paulo é de 20%¹.

Admitamos que essa taxa represente um equilíbrio dinâmico das condições de trabalho atuais, ou seja, existem pessoas sendo contratadas e demitidas na mesma razão, o que mantém a relação entre empregados e desempregados constante em um destes dois patamares. Podemos então assumir que, a probabilidade de uma pessoa permanecer empregada hoje equivale a $p_{v,0} = 87\%$ ou $p_{v,0} = 80\%$, dependendo da região em que o participante trabalha atualmente.

Entretanto, existe uma tendência de mecanização e robotização na economia brasileira. Um dos principais efeitos disto é a destruição de postos de trabalho que demandam uma mão de obra menos qualificada em benefício da criação de novos empregos para pessoas melhor qualificadas. No cenário descrito acima, seria de se esperar que a probabilidade de um indivíduo de baixa escolaridade perder o seu emprego seja maior do que a probabilidade de uma pessoa que tenha uma melhor qualificação.

Uma outra constatação real é que pessoas mais velhas têm perdido espaço no mercado de trabalho para pessoas mais jovens. Um dos motivos disso é que os jovens costumam aceitar salários mais baixos para desempenhar as mesmas funções de trabalhadores mais experientes. Sob essa ótica, $p_{v,t}$ tenderia a diminuir com o aumento de t . O gráfico da **Figura 4.4** sintetiza os três pontos levantados, apresentando as duas possíveis trajetórias de $p_{v,t}$ com o tempo que adotamos para cada um dos níveis de escolaridade do indivíduo.

¹ A fonte do dado para São Paulo é a Fundação SEADE (Sistema Estadual de Análise de Dados).

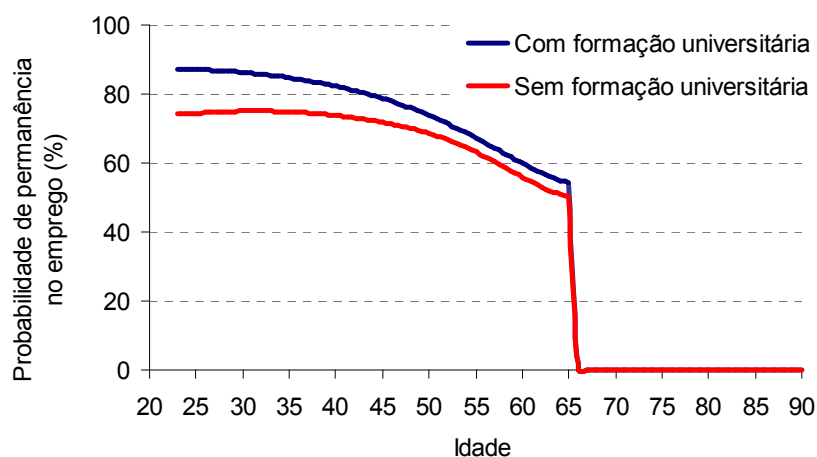


Figura 4.4 – Evolução da probabilidade de permanência no emprego para trabalhadores da região metropolitana de São Paulo.

Até aqui só foram apresentadas possíveis trajetórias dos parâmetros L_t e $p_{v,t}$ até o momento em que o indivíduo se aposenta. Dessa forma, a partir de sua aposentadoria, sua renda esperada seria reduzida a zero, juntamente com sua probabilidade de recebimento integral do salário, conforme pode ser visto nos gráficos das **Figuras 4.3 e 4.4**. É importante notar que, esse momento de aposentadoria ocorreria a uma idade exógena ao modelo, que adotaremos ser igual a 65 anos para homens e 60 para mulheres.

Entretanto, um aspecto bastante realista que também pode ser incorporado a este modelo é a característica básica do plano para o qual este trabalho foi desenvolvido. Este modelo é voltado para a otimização da alocação dos recursos e política de contribuições de um indivíduo a um plano complementar de previdência, que visa proporcionar uma renda adicional ao benefício garantido pelo plano público básico, ao qual o participante assalariado já contribui compulsoriamente todo mês.

Assim sendo, uma vez aposentados, os indivíduos não observariam suas receitas salariais esperadas caindo a zero. Estas passariam a ser dadas pelo valor recebido a título de benefício do INSS. Apesar de existir um pequeno risco, adotaremos que suas probabilidades $p_{v,t}$ de ocorrência são iguais a 100%. (depende basicamente do risco de crédito do sistema de previdência pública, que de certa

forma está relacionado com o risco de crédito do governo brasileiro como um todo, que é considerado livre de risco neste trabalho).

Passemos agora à obtenção do parâmetro φ , que é a fração do salário inicialmente esperado L_t , que o indivíduo efetivamente recebe em t caso seja demitido. Este valor depende basicamente de duas componentes.

- 1) **Do tempo que o indivíduo permanece desempregado.** Para deixar mais clara esta relação, suponhamos o seguinte caso. O indivíduo está empregado em janeiro e neste ano e espera receber um salário L_t . Em março ele é demitido e só volta a ser empregado em novembro, pelo mesmo salário que recebia anteriormente. Desta forma, seu rendimento anual foi equivalente a apenas 5/12 do esperado inicialmente, que corresponde à fração do ano efetivamente trabalhada. Serão desprezados neste cálculo qualquer tipo de ajuste, como por exemplo, os proporcionais ao 13º salário e férias.
- 2) **Direitos trabalhistas.** Geralmente, quando os trabalhadores são demitidos, estes têm direito de receber valores a título de multas ao empregador e realizar um saque no FGTS (Fundo de Garantia por Tempo de Serviço), cuja função é substituir a renda salarial perdida quando estão desempregados. Esses valores recebidos passam a compor a renda anual efetiva do indivíduo no caso de perda do emprego. Entretanto, um fato que dificulta sua modelagem é a dependência intertemporal (pois este valor aumenta em função do tempo de serviço), fato que desprezamos na modelagem de l_t . Desta forma, será assumida a hipótese de que esses direitos trabalhistas a receber representam o equivalente a um salário mensal do indivíduo (8,3% da renda anual), que é exatamente o que a empresa credita anualmente em sua conta de FGTS.

Segundo um estudo da Fundação SEADE (Sistema Estadual de Análise de Dados) de São Paulo, observou-se que, em 1999, as pessoas desempregadas em São Paulo, levavam em média 44 semanas para se recolocarem no mercado de trabalho.

Conseqüentemente, deveriam receber apenas $(52 - 44)/52$, ou 15%, do salário anual esperado. Assumiremos a hipótese de que essas condições se mantiveram até hoje. Somando a isso o efeito do FGTS, chegamos a um valor de aproximadamente 25% para o parâmetro φ .

Com base nos pontos levantados até agora, torna-se mais direta a determinação dos parâmetros de consumo mínimo de subsistência do indivíduo que foram introduzidos ao modelo na seção 4.2. Ao longo da vida de uma pessoa, é de se esperar que seu nível de consumo de subsistência deva subir com o passar dos anos. Isso decorre principalmente da elevação de seu padrão de vida e do aumento de suas responsabilidades, como, por exemplo, o nascimento de filhos. Pelo menos no que diz respeito à elevação do padrão de vida, podemos assumir que esta seja função da evolução salarial esperada para o indivíduo. Assim sendo o consumo mínimo de subsistência C_t^{subs} será dado por uma fração de L_t a cada $t = \{t_0, t_1, \dots, T\}$.

Para refinar um pouco mais o processo de obtenção de C_t^{subs} , podemos utilizar uma informação que está disponível no cadastro dos participantes de cada fundo de pensão, que é o seu número de dependentes. Desta forma, o efeito das responsabilidades financeiras também é levado em consideração. Assim sendo, definimos o coeficiente de comprometimento da renda como sendo a fração de L_t que corresponde a C_t^{subs} , e os valores assumidos para os diferentes números de dependentes estão apresentados na **Tabela 4.3**¹.

¹ Da mesma forma que para os diferentes perfis de risco, os valores apresentados na **Tabela 4.3** foram selecionados e calibrados pelo estudo de sensibilidade realizado, que será apresentado no Capítulo 5.

Número de dependentes	Valor da relação C_t^{subs} / L_t para todo t
0	30%
1	50%
2	70%
3 ou mais	85%

Tabela 4.3 – Razão entre as expectativas salariais e o consumo de subsistência, para diferentes números de dependentes.

Cabe observar que, pelas hipóteses assumidas, eventos temporais que não causam impacto ao crescimento salarial do indivíduo também não sensibilizam a evolução do consumo de subsistência. Alguns exemplos de eventos desta natureza são o nascimento de novos dependentes ou suas emancipações financeiras.

Para encerrar, assumiremos a hipótese que seu consumo de subsistência no ano de sua aposentadoria se reduz a 70% do valor que era no ano imediatamente anterior, permanecendo constante desse ponto em diante. Os principais fatores que devem ser levados em consideração são, por um lado, a efetiva redução no ritmo de vida das pessoas, e pelo outro, o aumento dos gastos relacionados à saúde.

Concluimos então as discussões a respeito da determinação dos parâmetros que caracterizam e diferenciam cada tipo de investidor perante o modelo. Conforme salientado na introdução deste capítulo, para a correta determinação destes parâmetros seriam necessários estudos estatísticos mais precisos do que os que foram apresentados aqui. Os métodos sugeridos têm como principal objetivo estabelecer uma ponte entre os dados atualmente disponíveis e a análise do modelo matemático, que será apresentada no Capítulo 5. Os pontos levantados podem ser utilizados como premissas, variáveis explicativas, ou ao menos hipóteses a se verificar nestes estudos a serem desenvolvidos posteriormente.

Os valores e métodos apresentados são adequados às necessidades da empresa em que este trabalho foi elaborado, pois as hipóteses que os cercam são bastante razoáveis. Passemos agora à descrição dos demais parâmetros do modelo.

4.4 Parâmetros demográficos e de mercado.

Uma vez apresentados os processos de obtenção dos parâmetros que regem as características específicas de cada investidor, devemos partir para a análise dos demais fatores que ditam o comportamento do modelo proposto no Capítulo 3. Nesta seção abordaremos os seguintes parâmetros:

T : idade máxima do indivíduo que o modelo deve levar em consideração;

t_0 : idade atual do participante do fundo;

δ : fator de desconto temporal;

p_t : probabilidade do indivíduo estar vivo em $t+1$, dado que este está vivo em t , para todo $t = \{t_0, t_1, \dots, T-1\}$

W_0 : riqueza inicial do investidor;

r^f : taxa de retorno esperada do ativo livre de risco da economia, suposta constante ao longo do tempo;

μ : prêmio de risco de mercado, suposto constante ao longo do tempo;

σ_η : desvio padrão, suposto constante ao longo do tempo, da distribuição normal de probabilidades dos choques aleatórios η_t com $t = \{t_0, t_1, \dots, T\}$;

Pela própria natureza de alguns destes, os seus processos de obtenção se dão diretamente dos cadastros da fundação de seus participantes, como é o caso dos parâmetros t_0 e W_0 . Outros podem ser estimados a partir de uma análise de dados históricos ou algum estudo mais detalhado existente no mercado. Passemos agora às hipóteses e métodos utilizados na determinação destes parâmetros.

A adoção de uma idade limite T ao indivíduo torna a resolução do modelo matemático razoavelmente mais simples, pois torna finito o seu horizonte de análise. Esse foi o principal motivo de sua adoção.

A consideração dessa idade limite é uma das premissas presentes na maioria dos cálculos atuariais. Por exemplo, existem planos do tipo CD, que no momento em que o participante se aposenta lhe é oferecida a opção de converter todos os seus recursos poupados em um fluxo pré-determinado de benefícios a receber por um dado número de anos. Essa operação é conhecida como “contratação de uma renda vitalícia”, e transforma o plano que antes era CD em um plano BD, entretanto, sem o risco atuarial da fase de acumulação de recursos inerente aos planos BD. Ao se calcular o valor deste benefício, considera-se direta ou indiretamente um prazo máximo que o indivíduo poderá viver. Mesmo no caso em que lhe são oferecidos benefícios até a morte, se parte de uma idade máxima para se realizar essa análise. Para resolução deste modelo, será adotado o valor de $T = 90$ anos, tanto para homens, quanto para mulheres.

Os próximos parâmetros que analisaremos são as probabilidades de sobrevivência do indivíduo até o ano $t+1$, dado que ele está vivo em t , para todo $t = \{t_0, t_1, \dots, T-1\}$. A introdução destes parâmetros ao modelo atribui um caráter mais realista à análise do processo de decisão intertemporal de consumo. Esses ajustam as expectativas de consumo futuro pelas probabilidades do indivíduo estar vivo nestes respectivos momentos, pois somente neste caso que ele estará obtendo alguma utilidade.

Estas probabilidades são conhecidas como tábuas de mortalidade e podem ser facilmente obtidas junto ao IBGE, discriminadas para cada um dos sexos ou de maneira consolidada.¹ Na resolução do modelo serão utilizados os dados consolidados de 2001, que é a data mais recente disponível. O único problema encontrado foi que a série do IBGE acaba aos 80 anos de idade, enquanto que a nossa necessidade se estende até os 90 anos. Desta forma, realizamos uma extrapolação exponencial a partir dos dados disponíveis para probabilidades entre 60 e 80 anos. Os resultados obtidos são visualmente bastante razoáveis e são

¹ Vide Apêndice I.

fundamentados estatisticamente por um R^2 muito elevado (99,8%)¹. A tábua de mortalidade utilizada e sua extrapolação até a idade de 90 anos podem ser visualizadas no gráfico da **Figura 4.5**.

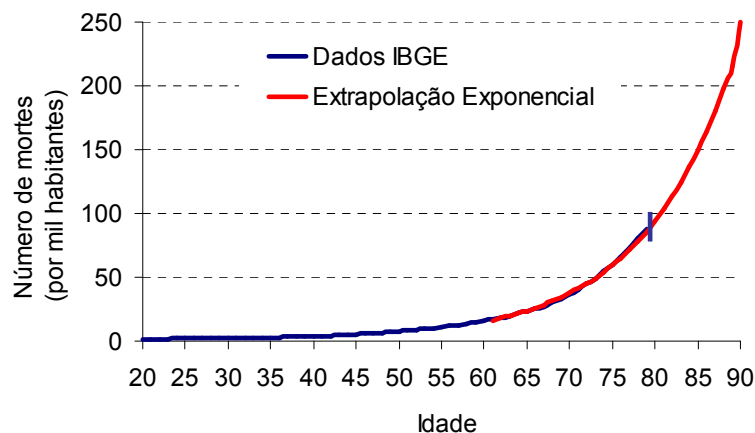


Figura 4.5 – Tábua de mortalidade e extrapolação realizada. Adaptação: IBGE.

O parâmetro δ representa o fator de desconto temporal (dado em base anual) que o modelo adotará para trazer os fluxos futuros de utilidade do investidor a seus respectivos valores presentes. Pode também ser entendido como o custo de oportunidade do indivíduo, quantificando sua preferência entre consumo imediato e consumos futuros. À medida que δ se aproxima de 0 (lembrar que $0 \leq \delta \leq 1$), menor será o peso das utilidades obtidas sobre consumos futuros. No limite, com $\delta = 0$ o investidor não se importará com o seu futuro, e maximizará seu consumo imediato. Utilizaremos $\delta = 0,93$ com base no estudo de dispersão das contribuições ótimas que será apresentado no próximo capítulo.

Para encerrar as discussões acerca dos parâmetros do modelo, analisemos as três componentes que regem o retorno do *portfolio* no qual o investidor aplica os seus recursos.

Segundo o CAPM, a decisão de alocação de recursos do investidor deve se basear em apenas dois ativos. O primeiro é o ativo livre de risco da economia, com

¹ Segundo Costa Neto (1977).

retorno esperado igual a r^f e volatilidade nula. Existem diversas linhas de pensamento na comunidade científica internacional sobre qual deve ser essa taxa no longo prazo em cada economia. Outra questão clássica é qual dos ativos existentes mais se assemelha a um ativo livre de risco. É bastante comum assumir que, em situações normais, os títulos emitidos pelos governos federais são isentos de risco.

Nos países em que a inflação é relativamente baixa e estável, adota-se como taxa livre de risco a taxa de juros paga pelos títulos pré-fixados de longo prazo emitidos pelos respectivos governos em moeda local. Esse é o caso de Estados Unidos, Inglaterra ou Japão. Entretanto, essa taxa no Brasil apresenta uma forte volatilidade, devida basicamente ao elevado risco de inflação que ainda existe no país. Dessa forma, a análise deve ser feita em moeda constante, o que nos remete a títulos não mais pré-fixados, porém, indexados a um indicador de nível de preços da economia. Existem atualmente dois papéis de emissão soberana interna que atendem a essa especificação, que são as Notas do Tesouro Nacional das séries B e C (conhecidas também, por NTN-B e NTN-C).

Esses títulos indexados a inflação têm apresentado nos últimos 5 anos uma rentabilidade média da ordem de 9,5% ao ano em termos reais¹. A análise foi feita com os papéis de prazos de vencimento superiores a 10 anos, que implicou na utilização de apenas NTN-Cs neste estudo. Assim sendo, adotaremos esse valor para a taxa livre de risco de longo prazo brasileira.

O segundo ativo é o *portfolio* de mercado, que é a carteira composta por todos os ativos de risco existentes na economia ponderados por seus respectivos valores de mercado. Sua expectativa de retorno no longo prazo é dada pela taxa livre de risco acrescida do prêmio de risco μ . Diversos autores já analisaram o problema a fundo e concluíram que o mercado de ações é uma boa “proxí” deste *portfolio*.

¹ As taxas reais de juros são equivalentes às taxas nominais descontadas da inflação no período.

De acordo com vários estudos citados em Brealey; Myers; Marcus (1999), o prêmio de risco do mercado de ações norte-americano foi historicamente da ordem de 8,5% ao ano, sendo que uma projeção deste para o futuro está na casa dos 6% ao ano. Assumiremos que o prêmio de risco para o mercado de ações brasileiro é igual ao do mercado americano. As diferenças entre condições macro-econômicas dos dois países já é levada em conta na taxa livre de risco brasileira, significativamente maior que a americana.

Quanto à volatilidade esperada do mercado de ações, esta será estimada pelo desvio padrão histórico dos retornos do Índice Bovespa. A volatilidade da bolsa tem se mostrado mais estável ao longo do tempo do que a média de seus retornos propriamente ditos, por isso é razoável e bastante comum no mercado financeiro a adoção de seu valor histórico. Isso ocorre também porque hipóteses acerca de sua evolução futura seriam mais vagas e subjetivas do que as hipóteses sobre, por exemplo, os retornos dos ativos. Adotaremos o valor de 35% ao ano para o parâmetro σ_η , que foi aproximadamente a volatilidade histórica observada das variações mensais no índice Ibovespa descontada a inflação, desde a introdução do plano real (julho de 1994) até agosto deste ano. (vide Apêndice II)

Encerramos aqui a apresentação dos métodos definidos para a obtenção de todos os parâmetros do modelo de otimização desenvolvido. Vale ressaltar a importância desta parte do trabalho com relação ao objetivo final de propor um modelo matemático de otimização que possa ser efetivamente implementado. No Capítulo 3 apresentamos o modelo de otimização em si, enquanto neste capítulo o foco foi a discussão da interface entre o modelo matemático elaborado e a realidade; como extrair dessa os *inputs* necessários da melhor forma possível. Estatisticamente falando, os processos de obtenção apresentados podem não ser os ideais, porém, são adequados e suficientes aos objetivos específicos do banco dado o tempo disponível, sendo que, dependendo de demandas futuras estes podem ser refinados. A seguir, tem-se um quadro resumo dos critérios adotados para a determinação de cada um dos parâmetros.

Parâmetro	Fonte / hipóteses assumidas	Valor
Parâmetros fixos do modelo		
p_t : probabilidade de sobrevivência	Tabuas de mortalidade do Senso IBGE 2001.	Vide Apêndice I
δ : fator de desconto temporal	Calibrado a partir de estudo de dispersão das contribuições ótimas apresentado no Capítulo 5.	0,93
T : idade máxima	Valor adotado	90
Parâmetros de mercado		
r^f : taxa livre de risco.	Retorno médio das NTN-C de prazos superiores a 10 anos	9,5%
μ : prêmio pelo risco de mercado	Brealey; Myers; Marcus (1999)	6%
σ_η : desvio padrão do choque ao prêmio de mercado	Série histórica do Ibovespa	35%
Parâmetros específicos do investidor		
γ : Aversão a risco	Questionário, com resultado calibrado por estudo de sensibilidade apresentado no Capítulo 5.	Defensivo: 1,93 Conservador: 1,70 Moderado: 1,40 Arrojado: 1,19 Agressivo: 1,08
t_0 e W_0	Cadastro dos participantes	Específico de cada indivíduo
Parâmetros de renda e consumo		
φ : Fração do salário recebida se desempregado	Dados do SEADE (99) e hipótese acerca do FGTS	25%
L_t : salário esperado	-Com formação superior: crescimento de 7% a.a. até os 50 anos e depois cte. -Sem formação superior: crescimento de 2% a.a até aposentadoria. Se considerado benefício básico: após aposentadoria igual ao valor esperado deste benefício, senão zero.	Determinado pelos critérios ao lado para cada investidor, a partir de seu salário líquido inicial e nível de escolaridade.
$p_{v,t}$: prob. De permanência no emprego	Dados atuais: IBGE e SEADE Depende da localidade de habitação. Hipóteses sobre evolução esperada: - Nível de escolaridade - Idade do indivíduo	Específico de cada indivíduo: -morador de SP: 80% senão 87% -Evolução esperada conforme apresentado na Figura 4.4
C_t^{subs} : consumo de subsistência	Definido a partir do coeficiente de comprometimento de renda, com valores calibrados por estudo de sensibilidade	Vide Tabela 4.3

Tabela 4.4 – Resumo dos métodos de determinação e valores dos parâmetros.

No próximo capítulo abordaremos as saídas do modelo, com as principais conclusões e análises de seu comportamento com relação a cada um destes parâmetros.



RESOLUÇÃO, RESULTADOS E ANÁLISE DE SENSIBILIDADE DO MODELO

CAPÍTULO 5: RESOLUÇÃO, RESULTADOS E ANÁLISE DE SENSIBILIDADE DO MODELO

5.1 Introdução

Nos capítulos anteriores, apresentamos um modelo de otimização cujo objetivo é determinar a política ótima de gestão dos recursos de um indivíduo, que pretende poupar para garantir a manutenção de seu padrão de vida após a aposentadoria. Discutimos também os critérios para a determinação de cada um de seus parâmetros, de tal forma que o modelo pudesse ser implementado com os dados atualmente disponíveis. Dedicaremos este capítulo à análise detalhada dos resultados obtidos, para termos um perfeito entendimento de seu comportamento e sabermos quais são os parâmetros que mais influenciam a solução ótima.

Iniciaremos na seção 5.2 com uma explicação em detalhes do processo de resolução numérica do modelo, uma vez que este não se dá de forma trivial. Entraremos em uma discussão técnica razoavelmente profunda, tanto pelo algoritmo de otimização utilizado quanto pelas ferramentas numéricas que se fizeram necessárias na sua resolução, como por exemplo, o método de integração numérica por quadratura de Gauss-Hermite.

Para facilitar a exposição dos principais resultados do modelo, apresentaremos na seção 5.3 as respostas das otimizações realizadas para três tipos básicos de pessoas: um jovem, uma pessoa na meia idade e uma já aposentada. Na seção 5.4 aprofundaremos a discussão a respeito das soluções obtidas para cada um destes 3 diferentes indivíduos com uma simulação, através da qual analisaremos as dinâmicas de evolução das soluções ótimas e da riqueza do indivíduo com o tempo.

Os valores numéricos atribuídos no Capítulo 4 para os diferentes perfis de risco, comprometimento mínimo da renda do indivíduo e o fator de desconto temporal foram baseados nas análises de sensibilidade que serão apresentadas nas

seções 5.5 e 5.6. Estes estudos realizados também tiveram uma forte influência na configuração final do modelo, graças aos testes conduzidos durante seu processo de desenvolvimento. Na seção 5.5, focalizaremos na análise de sensibilidade aos parâmetros de aversão a risco e riqueza inicial, enquanto na seguinte destacaremos a importância da abordagem estocástica adotada para a riqueza intrínseca e seus efeitos sobre a solução ótima. Encerraremos o capítulo apresentando as principais conclusões extraídas da extensa análise realizada do modelo.

5.2 Método de solução numérica.

Da maneira como o modelo foi exposto no Capítulo 3, deveríamos utilizar ferramentas de otimização estocástica para a determinação de sua solução ótima. Entretanto, Cocco; Gomes; Maenhout.(1998) sugeriram uma técnica de aproximação numérica um pouco diferente para esse tipo de problema. Os autores, após algumas adaptações, utilizam o mesmo algoritmo de resolução de problemas de programação dinâmica probabilística (PDP). Para a utilização deste algoritmo, o modelo deve ser reescrito na forma de um modelo de programação dinâmica, ou seja, através de um processo recursivo f que seja equivalente ao modelo estocástico inicial. Optamos pela mesma técnica de solução, sendo que ao longo desta seção apresentaremos:

- 1) o modelo desenvolvido reescrito na forma de um processo recursivo f ;
- 2) as adaptações que são necessárias para que a utilização desse algoritmo seja viável.

Para clarificar esse conceito, suponhamos algumas situações em que o indivíduo está no seu último ano de vida ($t = T$), cada uma com diferentes valores de patrimônio total acumulado. Para cada uma destas situações, a melhor decisão a ser tomada é a de consumir toda essa riqueza¹, maximizando assim a sua utilidade em T . Determinada a melhor decisão no último estado do modelo para diferentes

¹ Como foi definido no Capítulo 3, partimos da hipótese que o indivíduo não obtém nenhuma utilidade ao deixar herança.

valores iniciais de riqueza, imaginemos agora que ele está no ano imediatamente anterior. Da mesma maneira, suponhamos para diferentes níveis iniciais de patrimônio. A melhor decisão de alocação e consumo para cada um destes níveis é aquela que maximiza a soma da utilidade obtida deste consumo imediato (em $t = T - 1$) com a esperança de utilidade futura que o indivíduo pode obter consumindo em $t+1$ a fração poupada do patrimônio de t para $t+1$, que é e rentabilizada a uma taxa incerta. Winston (1991) e Bellman (1957) apresentam uma explicação detalhada sobre programação dinâmica probabilística. Com base nesse conceito, o modelo desenvolvido pode ser reescrito através da seguinte recursão f :

$$f_t(W_t) = \max_{C_t, \alpha_t} \left\{ \frac{\left(\frac{C_t}{C_t^{subs}} \right)^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} + \delta p_{t+1} E_t(f_{t+1}(W_{t+1})) \right\} \quad (5.1)$$

para $t = \{t_0, t_1, \dots, T-1\}$, sendo o último estado definido por:

$$f_T(W_T) = \frac{W_T^{1-\gamma} - 1}{1-\gamma} \quad (5.2)$$

O objetivo passa a ser maximizar f_0 para uma dada riqueza inicial W_0 específica de cada investidor. Por se tratar de um método recursivo de resolução, para obtermos o valor máximo de $f_0(W_0)$ necessitamos antes determinar todos os f_t para $t > t_0$ em todos os possíveis valores iniciais de estado W_t .

Entretanto, para que possamos aplicar o algoritmo mais simples e conhecido de PDP, três características devem ser observadas no modelo:

- 1) as variáveis de decisão do modelo devem ser discretas;
- 2) o número de possíveis valores iniciais a cada estado t deve ser finito, sendo todos estes pontos previamente conhecidos;

- 3) as variáveis não determinísticas devem ser regidas por distribuições discretas de probabilidade.

O problema é que nenhuma destas três condições são observadas no modelo desenvolvido no Capítulo 3. Primeiramente, as variáveis $\{(C_t, \alpha_t)\}_{t=t_0}^T$ são reais, sujeitas apenas às restrições de não negatividade e, para o caso das decisões de alocação a cada estado t , limitadas ao valor máximo de 1. Esse aspecto porém não é tão crítico, podendo ser resolvido ao restringirmos seus valores a um determinado número finito de pontos.

As maiores dificuldades encontram-se mesmo nas outras duas condições. A principal causa é o fato dos retornos do *portfolio* de mercado estarem sujeitos a choques aleatórios distribuídos segundo uma distribuição normal de probabilidades. O problema não é apenas esta ser uma distribuição continua de probabilidades, mas também porque implica em infinitos valores de riquezas iniciais W_t , a cada estado t . A seguir apresentaremos os métodos empíricos ou numéricos que utilizaremos para que o modelo desenvolvido possa ser resolvido segundo o algoritmo de PDP.

Para a adequação do modelo à primeira condição, utilizamos um método empírico para a discretização das variáveis de decisão, que é baseado no *trade-off* entre a precisão almejada e a velocidade de processamento computacional. A seguir, temos os critérios adotados para cada uma das variáveis:

- 1) Nível de consumo C_t , para todo $t = \{t_0, t_1, \dots, T\}$** – a cada etapa do processo recursivo f_t , será buscada a solução ótima entre M possíveis valores de consumo. Estes valores serão igualmente espaçados no intervalo $]0, W_t + \phi L_t]$. O limite superior de C_t é definido por $W_t + \phi L_t$ pois este é o máximo valor que o investidor, na pior das hipóteses, terá a sua disposição para consumo no estado t , que é quando este perde o emprego recebendo apenas a fração ϕ do salário inicialmente esperado L_t . Valores superiores a esse seriam viáveis caso o investidor permaneça

empregado em t , entretanto, conduziriam o modelo de otimização no cenário de perda de emprego a uma situação de inviabilidade, com $W_{t+1} < 0$. Assim sendo, os valores C_t^m para os quais pretendemos buscar o f_t máximo em cada t são dados pela seguinte expressão:

$$C_t^m = \frac{m(W_t + \phi L_t)}{M} \quad \text{com } m = \{1, 2, \dots, M\} \quad (5.3)$$

Será adotado na resolução do modelo $M = 50$.

2) Alocação no *portfolio* de mercado α_t para todo $t = \{t_0, t_1, \dots, T\}$ – as variáveis α_t serão divididas no mesmo nível de precisão que o utilizado nas recomendações dadas aos clientes pelo departamento de *private banking* da instituição financeira na qual este trabalho foi realizado. Os níveis de alocação do cliente são divididos de 5% em 5% pois, na maioria dos casos, movimentações do patrimônio investido menores do que esta não se justificam, devido à, por exemplo, custos de transação. Dessa forma:

$$\alpha_t \in \{0\%, 5\%, 10\%, \dots, 95\%, 100\%\} \quad (5.4)$$

Pelo o algoritmo clássico de PDP, a expectativa em t de melhor decisão em $t+1$ deve ser determinada através da somatória de todas as possíveis melhores decisões futuras ponderada pela respectiva probabilidade de ocorrência. Entretanto, como os choques ao retorno do *portfolio* de mercado seguem uma distribuição continua de probabilidades, o cálculo desta expectativa deve ser feito através da seguinte integral:

$$E_t(f_{t+1}(W_{t+1}(\eta_t))) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{t+1}(W_{t+1}(\eta_t))P(\eta_t)d\eta_t \quad (5.5)$$

Onde:

$W_{t+1}(\eta_t)$ representa a riqueza financeira do indivíduo acumulada no início do ano $t+1$, conforme definido no modelo proposto no Capítulo 3. Esta, por sua vez, é

função da variável aleatória η_t , como pode ser visto através das equações (3.8) e (3.13);

$P(\eta_t)$ é a função de densidade de probabilidade normal que rege o comportamento da variável aleatória η_t segundo $N(0, \sigma_\eta^2)$

Segundo Cocco; Gomes; Maenhout.(1998), uma razoável aproximação do valor desta integral pode ser obtida através do método de integração numérica denominado método de quadratura de Gauss-Hermite. Segundo este método, a expectativa hoje das melhores decisões futuras pode ser aproximada pela seguinte somatória:

$$E_t(f_{t+1}(W_{t+1}(\eta_t))) \cong \sum_{k=0}^{N-1} A_k f_{t+1}(W_{t+1}(\eta_{t,k})) \quad (5.6)$$

Com $W_{t+1}(\eta_{t,k})$ representando os valores de W_{t+1} calculados em cada um dos N pontos de Gauss $\eta_{t,k}$ extraídos da tabela padrão de Gauss-Hermite e A_k sendo seus respectivos pesos de Gauss adaptados. Maiores detalhes sobre o método numérico de integração, sua aplicação ao nosso caso específico e determinação dos valores de A_k e $\eta_{t,k}$ são apresentados no Apêndice III. Na **Tabela 5.1** estão os valores de A_k e $\eta_{t,k}$ para $N = 7$ e um desvio padrão de 35% dos choques aleatórios ao prêmio de mercado (σ_η).

k	$\eta_{t,k}$	A_k
0	-2,65196E+00	4,28576E-13
1	-1,67355E+00	1,10914E-05
2	-8,16288E-01	6,22419E-02
3	0	9,23568E-01
4	8,16288E-01	6,22419E-02
5	1,67355E+00	1,10914E-05
6	2,65196E+00	4,28576E-13

Tabela 5.1 – Valores dos parâmetros A_k e $\eta_{t,k}$.

Assim, a integral que representava a expectativa de melhor decisão futura foi aproximada por uma somatória sobre 7 pontos de Gauss, possibilitando a aplicação

do algoritmo tradicional de PDP. Em outras palavras, o que fizemos foi transformar a distribuição normal em uma distribuição discreta de probabilidades.

Essa aproximação também resolve parcialmente o problema enfrentado devido à condição 2 apontada anteriormente. Conceitualmente, agora o número de valores iniciais em cada estado t é finito. Entretanto, este cresce potencialmente com t a uma razão explosiva, como pode ser visto na equação abaixo.

$$\text{Número de estados iniciais em } t = (m * n * k)^{t-t_0} \quad (5.7)$$

Por essa razão, seria computacionalmente impraticável determinar $f_t(W_t)$ para todos possíveis estados iniciais de W_t . A solução encontrada então foi realizar este cálculo para apenas um determinado número J de valores de W_t , obtendo-se assim, J pontos $\{(W_{t,j}, f_{t,j}(W_{t,j}))\}_{j=0}^{J-1}$. Estes pontos servirão de nós a uma interpolação numérica, através da qual poderão ser estimados os demais valores de f_t , à medida que estes se fizerem necessários ao longo do algoritmo de recursão. O método de interpolação utilizado foi o *spline* cúbico, que é um dos mais utilizados em problemas de aproximação numérica dos mais diversos tipos. A sua principal vantagem, em comparação com outras técnicas de interpolação, é aproximar f_t por $J-1$ polinômios do terceiro grau mantendo as características de continuidade e a diferenciabilidade da função original em todos os pontos do intervalo analisado. Maiores informações sobre o *spline* cúbico e o critério empiricamente desenvolvido para a seleção dos J pontos $\{(W_{t,j}, f_{t,j}(W_{t,j}))\}_{j=0}^{J-1}$ a cada estado t , são apresentados no

* Para justificar essa equação, imaginemos que estamos no estado inicial $t = t_0$. Para cada m possíveis decisões de consumo e n decisões de alocação, podem ocorrer sete possíveis retornos k do *portfolio* de mercado. Dessa forma existem $m * n * k$ possíveis estados iniciais W_{t+1} em $t+1 = t_1$. Da mesma maneira, cada um desses $m * n * k$ possíveis estados iniciais de $t = t_1$ implicam em mais $m * n * k$ estados iniciais em $t = t_2$ e assim por diante.

Apêndice IV. O único ponto importante a se adiantar aqui, é que os J nós selecionados devem abranger todos os possíveis valores iniciais da riqueza do indivíduo a cada instante, pois esta técnica é bastante eficaz quando se pretende interpolar pontos, entretanto não se pode garantir o mesmo quanto a sua qualidade de extrapolação de um certo conjunto de dados. Dessa forma,

$$f_{t+1}(W_{t+1}) \cong \text{cubic}_{t+1}(W_{t+1}) \text{ para todo } t = \{t_0, t_1, \dots, T-1\} \quad (5.8)$$

sendo a função $\text{cubic}_{t+1}(W_{t+1})$ a interpolação por *spline* cúbico no ponto W_{t+1} definida sobre os J pontos $\{(W_{t+1}, f_{t+1}(W_{t+1}))\}_{j=0}^{J-1}$.

Resumindo-se então, com as técnicas apresentadas obtivemos aproximações discretas tanto para as variáveis de decisão quanto para os estados iniciais e para a distribuição de probabilidade do retorno do *portfolio*, que conforme definidos no Capítulo 3 apresentam a característica de serem contínuos. Dessa forma, pudemos aplicar o algoritmo de solução de problemas de PDP ao modelo de otimização desenvolvido, que é mais simples e fácil de se implementar em uma linguagem de programação.

O processo recursivo descrito foi implementado na linguagem *Perl*, que se destaca em comparação com as demais linguagens de alto nível por lidar com tabelas de dados de uma maneira bastante ágil, rápida e simples. A listagem completa e devidamente comentada do programa desenvolvido encontra-se no Apêndice V.

Maiores detalhes acerca dos métodos numéricos utilizados podem ser vistos em seus respectivos apêndices e nas referências bibliográficas sugeridas. Todos os parâmetros das aproximações feitas, seja ela via método numérico ou empírico, foram testados e analisados, sendo que os valores apresentados representam a melhor relação entre precisão do modelo e tempo computacional demandado. Não cabe aqui aprofundar mais nesta discussão, uma vez que estes valores e métodos são muito parecidos com os sugeridos nas referências estudadas.

5.3 Resultados obtidos

Uma vez apresentado o método numérico de resolução do modelo proposto, passemos agora à análise detalhada de seus resultados, buscando entender o seu comportamento e identificar seus parâmetros mais importantes. Para facilitar a exposição dos pontos estudados, utilizaremos como base os resultados obtidos para a política ótima de contribuição e alocação dos recursos para três diferentes tipos padrão de indivíduo. Na **Tabela 5.2**, temos algumas características específicas de cada um deles, que aliadas às hipóteses e valores apresentados no Capítulo 4, sintetizam e definem todos os parâmetros do modelo para cada um dos três casos.

Características	Indivíduo A	Indivíduo B	Indivíduo C
Idade atual (anos)	23	46	67
Sexo	Masculino	Masculino	Masculino
Salário líquido atual (mil R\$ / ano)	23	55	-
Saldo acumulado (mil R\$)	-	30	450
Consumo de subsistência após aposentadoria (mil R\$ / ano)	30	47	21
Perfil de aversão ao risco	Moderado ($\gamma = 1,4$)	Conservador ($\gamma = 1,7$)	Conservador ($\gamma = 1,7$)
Nível de escolaridade	Com formação superior	Com formação superior	Com formação superior
Considerar efeito do INSS?	Sim	Sim	Não
Número de dependentes	0	2	1
Residente em São Paulo?	Sim	Sim	Sim

Tabela 5.2 – Características necessárias para a definição dos parâmetros de cada um dos 3 indivíduos adotados. A listagem completa de todos os parâmetros de entrada pode ser vista no Apêndice VI.

O **Indivíduo A** pode ser considerado um jovem recém formado, que está entrando agora no mercado de trabalho e já começa a pensar na sua aposentadoria. Como contribui compulsoriamente ao INSS, espera poder contar com mais este benefício na hora em que não estiver mais trabalhando. O **Indivíduo B** seria um chefe de família, com formação acadêmica e que tem buscado acumular recursos para sua aposentadoria ao longo destes últimos anos. Recebe um salário razoável, mas tem boa parte da sua renda comprometida com as obrigações do dia a dia. Para finalizar, o **Indivíduo C** seria uma pessoa já aposentada, que, por nunca ter contribuído ao INSS deve financiar suas necessidades de consumo única e

exclusivamente com o patrimônio acumulado (realizando assim, ao invés de contribuições, saques ao fundo).

Neste momento, procuramos não diferenciar demais os indivíduos em todos os parâmetros do modelo, o que dificultaria esta primeira análise. O objetivo aqui é iniciar as discussões focalizando apenas nos efeitos da idade e das riquezas inicial e intrínseca. Nas próximas seções abordaremos a sensibilidade aos demais parâmetros. Os resultados das otimizações realizadas para cada um destes indivíduos são apresentados na tabela a seguir:

	Indivíduo A	Indivíduo B	Indivíduo C
Consumo ótimo em $t = t_o$ (mil R\$)	17,74	41,93	50,38
Contribuição ao fundo em $t = t_o$ (%)	14%	24%	-
Alocação em ações ótima em $t = t_o$ (%)	50%	45%	15%
Utilidade total	6,165	5,471	5,323

Tabela 5.3 – Resultado das otimizações para cada tipo de indivíduo.

Ao longo da exposição que faremos neste capítulo, preferimos lidar com a contribuição do indivíduo ao fundo ao invés do seu nível de consumo propriamente dito. A contribuição pode ser entendida, de certa forma, como uma padronização da variável de consumo pelo salário esperado do indivíduo, dada pela equação:

$$(1 - C_t / L_t). \quad \text{Para todo } t = \{t_o, t_1, \dots, t_N\}$$

Faz mais sentido comparar as respostas de diferentes pessoas por seus valores ótimos de contribuição do que por seus níveis absolutos de consumo, além do que na prática, o investidor deseja saber o quanto ele deve poupar, não consumir.

Para uma melhor noção do comportamento da função objetivo com relação às variáveis de decisão, apresentamos na **Figura 5.1** a função de utilidade total do **Indivíduo B** ($f_{t_o}(55)$) ao redor do seu ponto de máximo. Com base no argumento dado acima, o gráfico está em função de sua contribuição ao fundo ao invés do consumo. Somente lembrando, contribuições menores do que zero indicam apenas

que o indivíduo deve realizar saques no fundo, não implicando num primeiro momento em situações de inviabilidade.

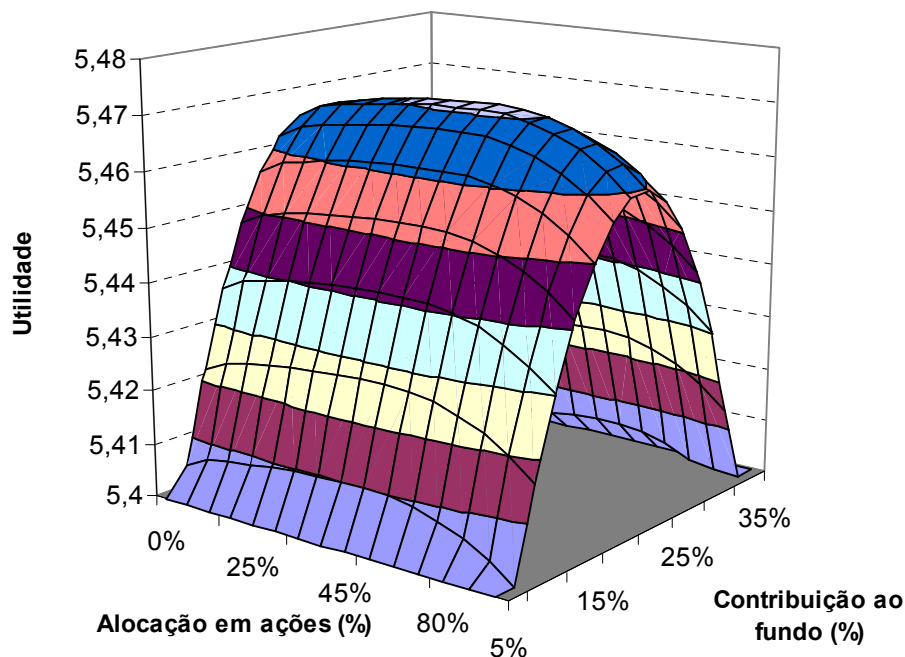


Figura 5.1 – Visualização do formato da curva de utilidade e seu respectivo ponto de máximo para o indivíduo B.

Como pode ser visto, a função de utilidade é muito mais sensível a variações na contribuição do que na alocação no *portfolio* de mercado¹. Isso seria de se esperar, uma vez que a utilidade é definida diretamente sobre o consumo, com a decisão de alocação causando uma influência secundária, tendo impacto apenas nas transições entre os estados do modelo. Essa é uma das justificativas para termos utilizado uma precisão maior ao discretizar a variável de consumo em comparação com α_t .

Porém, pelo lado da empresa em que este trabalho foi realizado, que é de gestora dos recursos do cliente, a principal questão a se determinar é exatamente a

¹ Repare na **Figura 5.1** como a concavidade das curvas resultantes das intersecções dos planos UtilidadeXContribuição para diferentes alocações com a função utilidade é maior do que a concavidade das curvas resultantes das intersecções dos planos UtilidadeXAlocação para diferentes contribuições com a mesma.

quantidade de recursos a alocar no ativo livre de risco e no *portfolio* de mercado, pois a decisão de contribuição anual depende muito mais da vontade e disciplina do cliente, cabendo à empresa apenas a atividade de aconselhamento. Por esse motivo, damos um pouco mais de atenção à análise de sensibilidade da decisão ótima de alocação.

Fazendo-se agora uma análise comparativa entre os três tipos de indivíduos através dos dados apresentados na **Tabela 5.3**, confirmamos o conceito intuitivo e largamente difundido entre a maioria dos consultores financeiros, que é de que quanto mais jovem a pessoa e mais cedo esta começa a contribuir para seu fundo de pensão, maior pode ser a sua alocação em bolsa e menor é a contribuição necessária para garantir a sua aposentadoria. O Indivíduo A, que é mais jovem e tem o maior valor produtivo entre os três, teoricamente tolera uma alocação maior em bolsa. Comparando sua necessidade de contribuição ao fundo, percebemos também que esta é inferior à do Indivíduo B, por exemplo. No caso do Indivíduo C, temos a situação limite onde o modelo desenvolvido não traz informações adicionais em comparação com outros modelos de alocação, dado que, uma vez aposentadas, as pessoas não apresentam mais riqueza intrínseca. Justamente por isso¹, sua alocação recomendada é bem inferior à dos demais.

Para concluir, cabe analisarmos os números de utilidade máxima obtidos. O seu valor absoluto depende basicamente dos fluxos futuros de consumo dos indivíduos, ou mais precisamente, do montante consumido acima do nível de subsistência em cada estado t . Dessa forma seria de se esperar que, quanto mais nova a pessoa maior este valor de máxima utilidade total, que é o que se realmente observou nos exemplos apresentados. Na próxima seção, daremos seqüência à análise dos resultados obtidos, na qual discutiremos a evolução temporal esperada das políticas ótimas de alocação e contribuição.

¹ Baseado na discussão acerca dos impactos da riqueza intrínseca apresentada no Capítulo 3.

5.4 Simulação: a evolução esperada do patrimônio e da política ótima de investimentos do indivíduo

Com os dados apresentados até então, não podemos inferir mais nada de muito significativo sobre o modelo. Para aprofundar a análise e lembrando que um sub-produto de um modelo de programação dinâmica são exatamente as melhores decisões f_t a serem tomadas (com os respectivos valores de alocação e contribuição ótimos) em todos os instantes $t > t_0$, simulamos os eventos aleatórios futuros para, com base nestes dados, determinarmos quais seriam as evoluções esperadas da riqueza, contribuição e alocação sugerida para cada indivíduo ao longo de toda a sua vida, de $t = t_1$ até o final do horizonte considerado ($t = T$). Dessa forma, a partir dos valores médios obtidos, traçamos os gráficos que serão apresentados nesta seção. Passemos então aos principais resultados obtidos para cada um dos três indivíduos definidos anteriormente.

O gráfico da **Figura 5.2** mostra a expectativa de crescimento do saldo acumulado no fundo de pensão pelo **Indivíduo A** ao longo de sua vida (curva azul). Seu patrimônio aos 23 anos é praticamente inexistente, sendo que este deve crescer exponencialmente a partir daí, devido ao efeito tanto das contribuições anuais ao fundo quanto do crescimento vegetativo dos saldos acumulados. É esperado que esse valor seja máximo antes do indivíduo se aposentar, que é o momento a partir do qual o investidor deve parar de contribuir e passar a realizar saques para financiar a manutenção de seu padrão de vida.

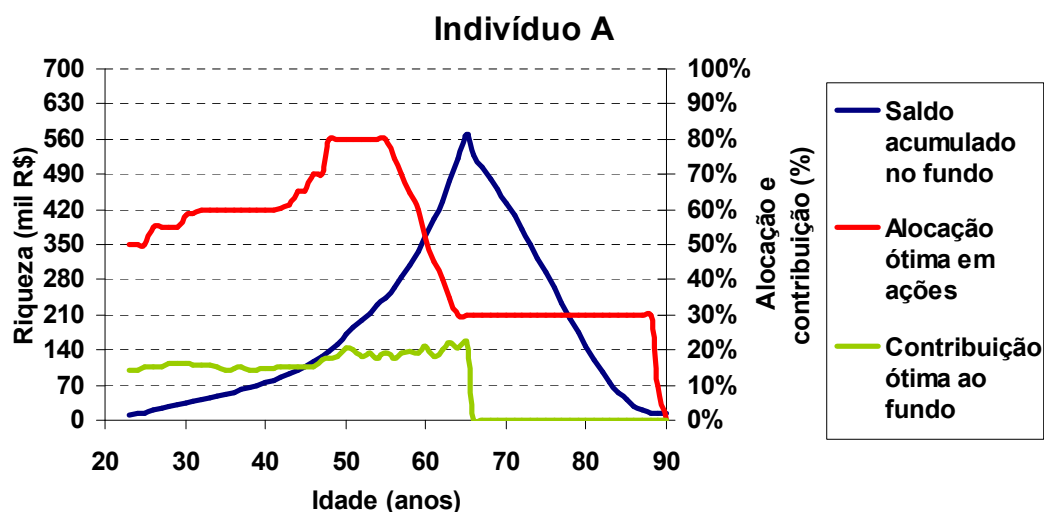


Figura 5.2 – Evolução esperada da riqueza do Indivíduo A, bem como suas políticas ótimas de contribuição e alocação em ações ao longo do tempo.

Quanto a sua política ótima de contribuição, por ser bastante jovem o modelo lhe recomenda realizar contribuições inicialmente pequenas, na ordem de 14% de sua renda anual, com um ligeiro crescimento até a casa dos 20% com o passar do tempo (curva verde). Mesmo com este aumento na contribuição, como seus níveis de consumo imediato sugeridos pelo modelo são altos em relação a suas necessidades mínimas de consumo para subsistência, o **Indivíduo A** apresenta uma boa folga orçamentária, como pode ser visto na **Figura 5.3**.

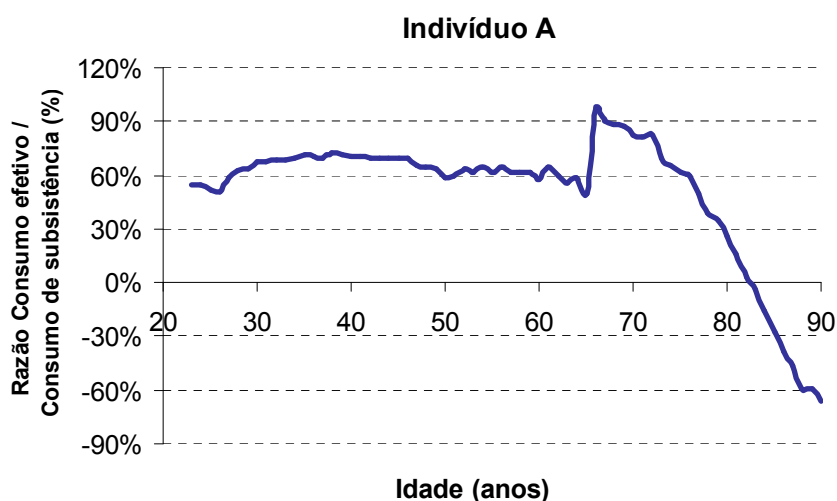


Figura 5.3 – Razão entre o consumo recomendado ao Indivíduo A e sua necessidade básica de subsistência.

Essa relação só cai abaixo de zero após a idade de 83 anos, o que é justificado pelo seguinte motivo: para idades mais altas, como a probabilidade de sobrevivência p_t é relativamente mais baixa, qualquer utilidade sobre o consumo futuro perde importância em relação ao consumo presente, o que leva o modelo a tolerar utilidades negativas nos últimos anos de vida. Em outras palavras, a probabilidade mais alta do indivíduo morrer a partir dos 83 anos justifica um consumo um pouco mais elevado antes desta data.

A evolução mais interessante porém, ocorre com a alocação em bolsa. Por ser uma pessoa razoavelmente propensa ao risco ($\gamma = 1,4$ e alta riqueza produtiva), a fração do patrimônio do **Indivíduo A** investida no *portfolio* de mercado em $t = t_0$ é relativamente alta, 50%. Entretanto, à medida que este começa a acumular uma riqueza financeira maior, sua alocação aumenta ainda mais, atingindo um nível de 80% aos 48 anos (vide **Figura 5.3**). Esse aumento decorre de um conservadorismo que o modelo endogenamente impõe ao investidor quando este ainda é jovem e apresenta um baixo patrimônio financeiro (dando aqui a entender que a alocação do indivíduo poderia ser ainda maior quando jovem se não fosse por esse efeito). Analisaremos em detalhes o fato da baixa riqueza inicial representar uma restrição de alocação no ativo de risco mais adiante.

Uma vez atingido esse nível de 80%, a alocação permanece constante até que a idade de aposentadoria do indivíduo se aproxime. Deste ponto em diante, a participação da bolsa em sua carteira deve ser reduzida drasticamente, convergindo para um nível de alocação de 30%. Isso ocorre basicamente porque a riqueza intrínseca do indivíduo (que a partir de agora é dada unicamente pelos fluxos de benefícios do INSS) não é mais capaz de financiar as suas necessidades de consumo, obrigando-o a aplicar seus recursos de uma maneira menos arriscada. Como já foi dito, as decisões de alocação nessa etapa da vida do indivíduo são bastante semelhantes às obtidas com modelos mais simples de otimização, entretanto sua consideração na determinação das decisões ótimas anteriores a ela é um dos principais diferenciais deste modelo.

Analisando-se agora a política de investimentos do **Indivíduo B**, percebemos que esta é fortemente influenciada pela necessidade de acumulação de riquezas. Se compararmos sua alocação em ações com a do **Indivíduo A**, esta é relativamente alta, dado que **B** é mais velho e tem uma aversão a risco maior. O baixo saldo inicial acumulado e o menor prazo para acumulação dos recursos necessários para a manutenção de seu padrão de vida após a aposentadoria o obrigam a manter elevada por mais tempo a sua alocação em ações. Ou seja, o modelo indica que o investidor **B** deve se preocupar mais em maximizar o retorno esperado, para dessa forma, maximizar a riqueza.

Além deste efeito sobre sua alocação inicial, são observados os mesmos comportamentos temporais sobre a decisão de alocação que os destacados para o **Indivíduo A**, com a ressalva de que seu limite máximo é inferior devido, basicamente, ao seu parâmetro de aversão a risco maior.

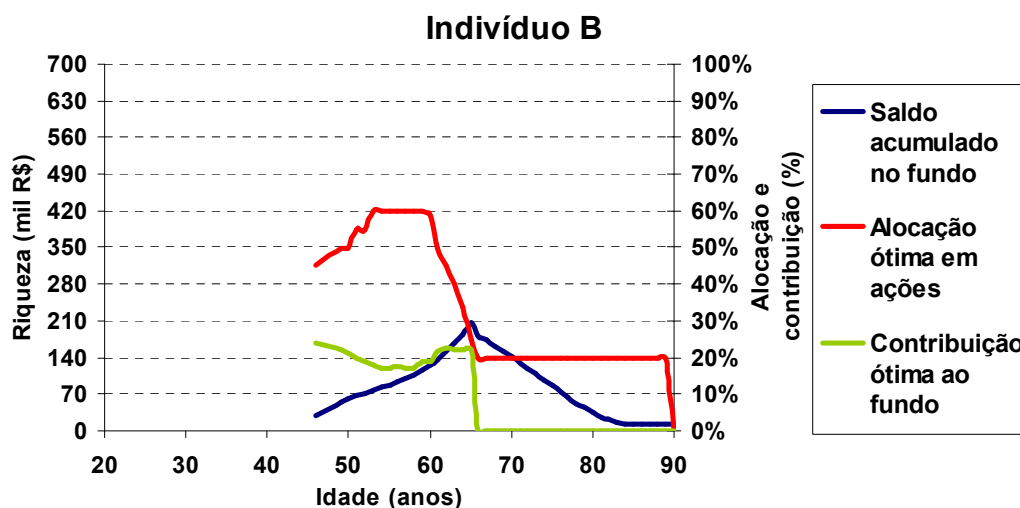


Figura 5.4 – Evolução esperada da riqueza do Indivíduo B, bem como suas políticas ótimas de contribuição e alocação em ações no futuro.

Por conta da necessidade de acumulação de riquezas salientada anteriormente, seu nível de contribuição é bastante elevado, permanecendo acima de 20%. Se comparado com o nível de contribuição do **Indivíduo A** este não é tão alto, mas em termos relativos às necessidades mínimas de consumo, o considerável esforço poupador do **Investidor B** pode ser visto mais claramente (vide **Figura 5.5**)

Suas necessidade mínimas de consumo são elevadas devido à hipótese assumida no Capítulo 4 quanto ao efeito do numero de dependentes na definição dos parâmetros

$$C_t^{subs}.$$

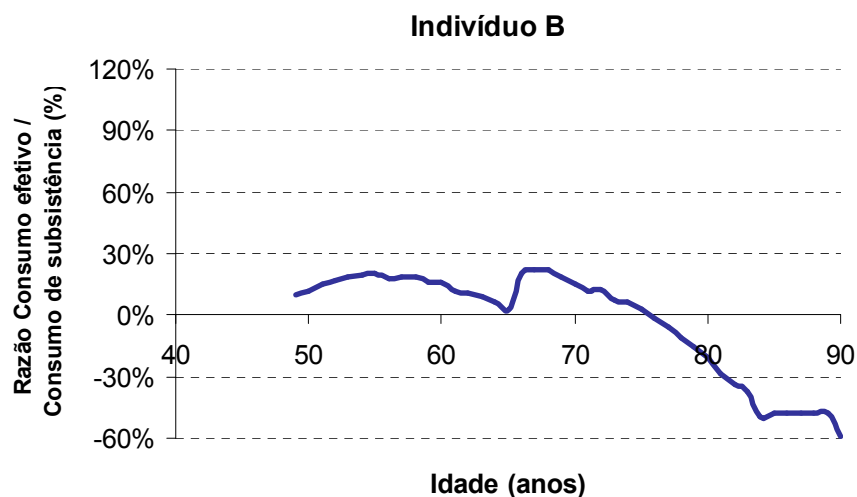


Figura 5.5 – Razão entre o consumo recomendado ao Indivíduo B e sua necessidade básica de subsistência.

Mesmo poupando praticamente toda a riqueza possível, esperamos que o **Investidor B** passe a não mais conseguir financiar seu padrão de vida anterior a partir de seu 75º ano de vida. Na prática, esse é o caso da grande maioria dos clientes dos fundos de pensão: indivíduos que começam a pensar em suas aposentadorias somente a partir de um momento em que a manutenção de seus padrões de vida já não é mais viável. Um ponto a respeito das hipóteses do modelo que pode suavizar a situação apresentada é o fato de termos assumido que o indivíduo continua a sustentar os mesmos dois dependentes financeiros até a sua morte, fato este que provavelmente não deve ser observado, principalmente nessas idades mais avançadas.

Concluindo a apresentação dos principais resultados do modelo e de sua dinâmica de funcionamento, analisaremos a situação do **Indivíduo C**, para o qual, conforme já mencionado, o modelo representa um avanço menos significativo. Depois de aposentado, principalmente para o caso em que a pessoa não conta com os

benefícios do INSS, a riqueza intrínseca passa a não mais desempenhar um papel fundamental em sua política de investimentos.

A alocação ótima em ações para o **Indivíduo C** permanece constante em 15%, sendo que o investidor deve realizar saques no fundo de pensão para financiar seu consumo (vide **Figura 5.6**). Essa constância na alocação decorre do fato de não haver mais a possibilidade ocorrência de nenhum evento que possa alterar as condições do modelo. Ou seja, as conclusões extraídas daqui seriam as mesmas das de um modelo mais simples desenvolvido para um horizonte de apenas um período, como por exemplo, os modelos apresentados ao longo da revisão bibliográfica do Capítulo 3.

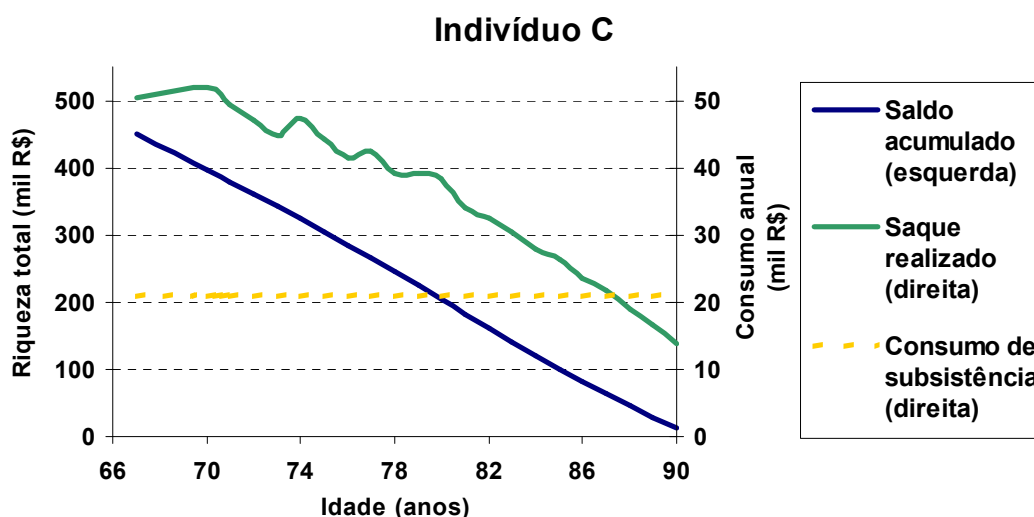


Figura 5.6 – Evolução esperada da riqueza do Indivíduo C, bem como suas políticas ótimas de contribuição e alocação em ações no futuro.

Nessa fase da vida, as únicas variáveis específicas do investidor que podem influenciar as decisões de consumo e investimento são o seu parâmetro de aversão a risco, sua riqueza inicial e o recebimento ou não do benefício proveniente do sistema público de previdência social. Os efeitos das variações destes parâmetros à solução ótima são os alvos das análises que serão apresentadas na próxima seção.

5.5 Análise de Sensibilidade: a aversão a risco do investidor e seu patrimônio inicial

Algumas das justificativas apresentadas para características observadas no comportamento das soluções ótimas foram obtidas com base nas constatações feitas através dos testes de análise de sensibilidade. Nesta seção, daremos início à exposição dos principais e mais relevantes testes realizados com o modelo.

O primeiro ponto que cabe ressaltarmos é o impacto do coeficiente de aversão a risco γ sobre a solução ótima. Também apresentaremos o procedimento adotado para a atribuição dos valores numéricos de γ para cada um dos diferentes perfis qualitativos de risco do questionário elaborado (conforme apresentado na **Tabela 4.2**)

O estudo realizado foi baseado em dois momentos da vida do indivíduo, um enquanto ele ainda é jovem e outro depois de aposentado. Para tal, utilizamos como base os parâmetros dos **Indivíduos A e C** respectivamente, e variamos apenas os seus valores de aversão a risco no intervalo entre 1 e 2¹. O estudo foi conduzido em dois pontos distintos da vida das pessoas com o objetivo de identificar se há também algum efeito da riqueza intrínseca sobre a sensibilidade ao γ . Na **Figura 5.7** temos os resultados obtidos, onde estão apresentadas as alocações em ações ótimas α_0 em função do parâmetro γ para ambos os casos.

¹ Para melhorar a qualidade da análise, aumentamos a precisão das variáveis de decisão de alocação α_t para intervalos de 1% em 1%.

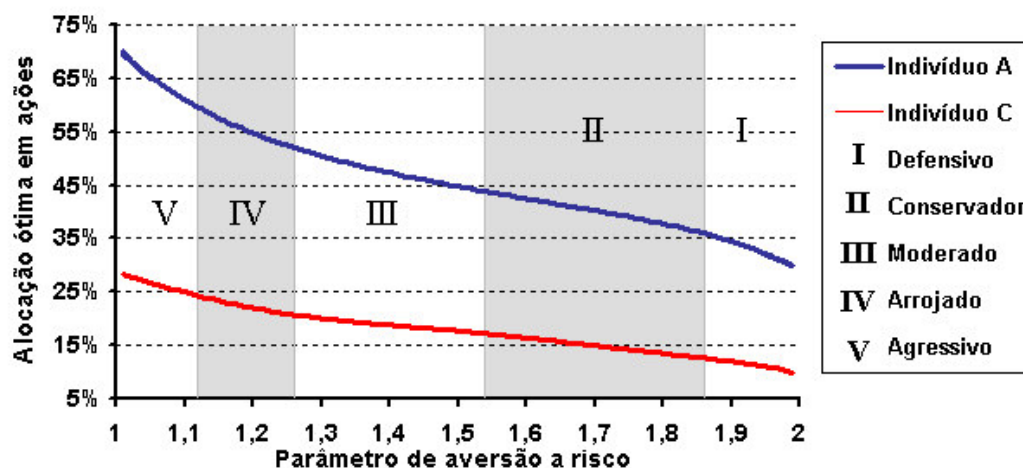


Figura 5.7 – Sensibilidade da solução ótima às variações na aversão a risco dos investidores e as bandas qualitativas de γ .

A principal conclusão é que variações em γ causam grande impacto à solução ótima, o que justifica a importância dada para sua determinação no capítulo anterior. A diferença entre as curvas azul e vermelha apresentadas acima decorre do efeito das riquezas intrínseca do indivíduo. Preferimos não apresentar o caso do **Indivíduo B** nesta análise pois este sofre uma influência mais forte da necessidade de acumulação de riquezas, o que gera uma distorção na sua decisão de alocação inicial quando comparada aos outros 2 exemplos. Entretanto, o ponto máximo esperado que a sua alocação atinge ao longo da vida é inferior ao ponto de máxima alocação esperada para o **Indivíduo A** devido principalmente a sua aversão a risco maior.

O outro objetivo deste estudo foi de calibrar os valores de γ referentes aos 5 perfis de risco do questionário compilado, para que, diferentes respostas obtidas a partir deste impliquem efetivamente em diferentes recomendações financeiras. Dessa forma, dividimos a amplitude das decisões ótimas de alocação para ambos os tipos de investidores (**A** e **C**) em 5 classes iguais, definindo, assim, as 5 bandas de γ apresentadas na **Figura 5.7**. Os respectivos valores médios destas bandas foram os valores de γ atribuídos a cada um dos diferentes perfis de risco do questionário, conforme apresentamos na **Tabela 4.2**.

Conforme os resultados apresentados na seção anterior, a riqueza inicial W_0 é um outro fator que exerce uma forte influência sobre a política ótima de investimentos do indivíduo. Para quantificar esse efeito, realizamos simulações para os **Indivíduos A e B** variando apenas os valores de W_0 . Os resultados foram os seguintes: à medida que a riqueza inicial aumenta, a alocação inicial em ações também aumenta. Entretanto, este crescimento ocorre até que um nível máximo seja atingido. Exemplificaremos a análise apresentando os dados obtidos para o **Indivíduo B** (que é quem é mais sensível a esse efeito) para quem, esse nível máximo é de a uma alocação de 60% em ações para uma riqueza inicial de aproximadamente R\$100.000,00. Esses valores serão chamados de alocação crítica e ponto crítico, respectivamente, sendo que no caso acima foram determinados de uma maneira empírica..

Uma observação importante é que, para patrimônios iniciais inferiores ao ponto crítico, o nível máximo de alocação de um indivíduo ao longo de sua vida será o mesmo, dado pela sua alocação crítica. A única coisa que muda é o momento em que esta será atingida. Com valores de riqueza inicial relativamente baixos, o modelo impõe um certo conservadorismo ao indivíduo, reduzindo sua alocação em bolsa em $t = t_0$ para um nível inferior a esse máximo teórico. A alocação só atinge esse máximo com o passar do tempo, à medida que o patrimônio financeiro também cresce. Para riquezas iniciais mais próximas ao valor crítico, esse nível máximo é atingido em menos tempo. No limite, quando W_0 é igual ao ponto crítico, a alocação em ações permanece constante até a proximidade da idade de aposentadoria, e igual à alocação crítica.

Na **Figura 5.8** temos, no exemplo adotado para o **Indivíduo B**, a sensibilidade de α_0 à variações em W_0 onde destacamos o seu ponto crítico. Já na **Figura 5.9**, apresentamos o efeito descrito acima sobre toda a evolução esperada de α_t .

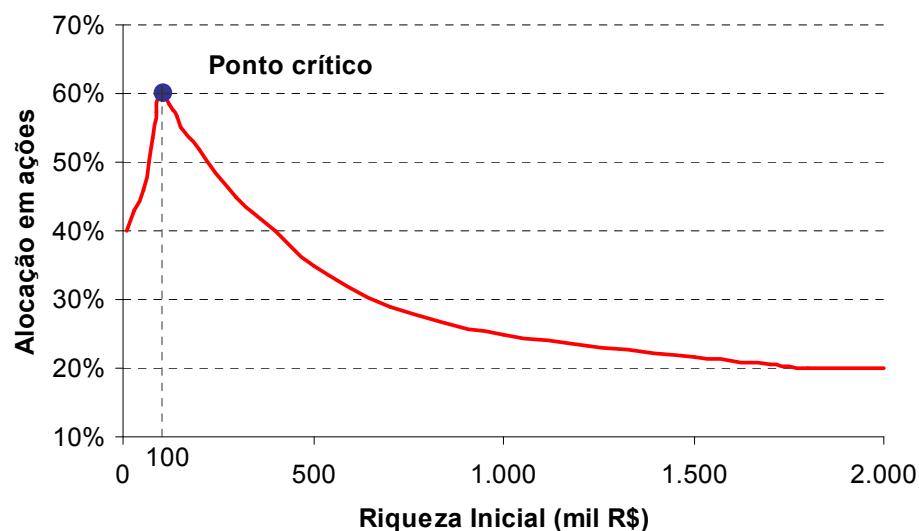


Figura 5.8 – Alocação inicial em ações do indivíduo B em função de sua riqueza inicial, com destaque dado ao seu ponto crítico.

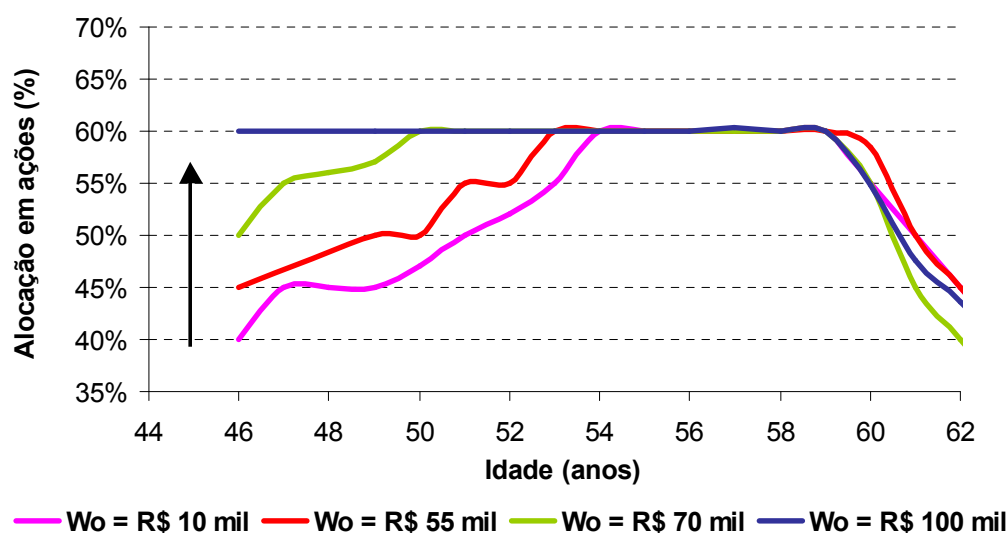


Figura 5.9 – Convergência para os valores críticos de toda a curva de expectativa de alocação futura do Indivíduo B com o aumento de sua riqueza inicial.

Esse efeito deve ser bem analisado e compreendido, pois a grande maioria dos clientes possui um nível de riqueza inicial que os coloca abaixo de seus pontos críticos. Um outro ponto interessante é o comportamento da alocação inicial dos indivíduos para riquezas iniciais superiores aos seus pontos críticos. À medida que os indivíduos apresentam um patrimônio inicial cada vez mais alto, suas alocações

ótimas iniciais caem, convergindo assintoticamente ao valor de alocação que deveriam ter somente quanto aposentados. Essa queda também pode ser observada ao longo de toda sua estrutura futura esperada de alocação, como pode ser visto na **Figura 5.10**.

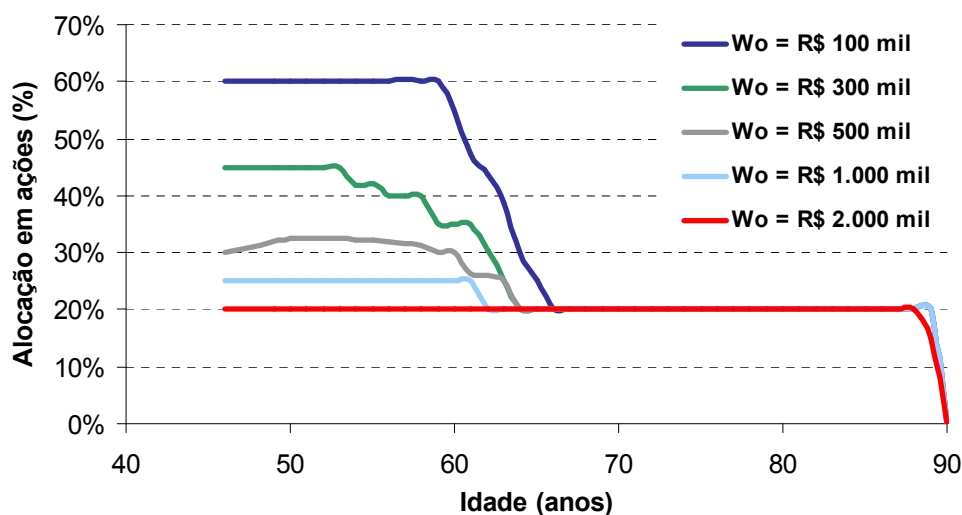


Figura 5.10 – Sensibilidade da curva de evolução da alocação ótima em ações do Indivíduo B a valores de riqueza inicial superiores ao ponto crítico

A principal justificativa deste efeito é o fato de, à medida que a riqueza inicial do indivíduo cresce com relação a sua riqueza intrínseca, a segunda passa a desempenhar um papel cada vez menor sobre as decisões de investimento, até o limite em que seu peso no modelo chega a um estágio insignificante. Nesse momento, a alocação ótima passa a ser a mesma de quando o indivíduo já está aposentado, ou seja, efetivamente não apresenta nenhuma riqueza intrínseca.

5.6 Análise de Sensibilidade: Os parâmetros associados à renda.

Os parâmetros salariais também têm um impacto relativamente grande nos níveis ótimos de alocação e contribuição do indivíduo. Devido à dificuldade de separação de seus efeitos individuais, iniciaremos as discussões pela análise de sensibilidade conjunta dos parâmetros $p_{v,t}$ e φ , que são, respectivamente, as

probabilidades de permanência no emprego na idade t e a fração do salário esperado efetivamente recebida em caso de perda deste. Esses são os dois parâmetros que ditam o risco salarial do indivíduo. Em seguida, abordaremos o coeficiente de comprometimento da renda, que é, conforme definimos no Capítulo 4 dado pela razão entre o salário esperado L_t e o consumo mínimo de subsistência C_t^{subs} . Encerraremos com uma breve discussão dos impactos do fator de desconto temporal δ e da consideração do benefício do INSS sobre a solução ótima.

O gráfico da **Figura 5.11** mostra a relevância dos parâmetros $p_{v,t}$ e φ nas decisões ótimas de alocação inicial. Os dados são referentes ao **Indivíduo A**, pois este, dos exemplos adotados, é o mais jovem, portanto, está mais suscetível ao risco envolvido na sua riqueza intrínseca. O **Indivíduo A** é um caso extremo, sendo que com o passar dos anos essa sensibilidade diminui, com as curvas convergindo para uma reta horizontal (no ano de aposentadoria). Esse efeito ficou restrito à decisão ótima de alocação, com a política ótima de contribuição ao fundo não apresentando sensibilidade aos parâmetros que regem o risco do fluxo salarial.

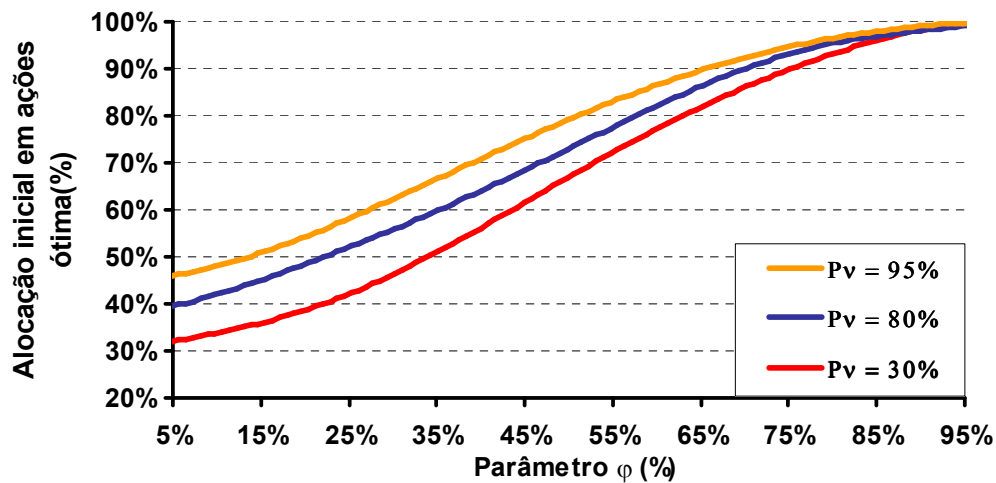


Figura 5.11 – A alocação ótima em ações para o Indivíduo A em função do risco envolvido em sua riqueza intrínseca.

Algo bastante interessante é o parâmetro φ ser mais decisivo sobre a solução ótima do que a probabilidade propriamente dita de se perder o emprego, indo contra uma possível intuição inicial. Isso decorre basicamente de ser pouco determinante o

fato do indivíduo permanecer ou não empregado, mas sim, se para o pior caso este terá ou não uma perda significativa de renda.

Antes de encerrarmos esta discussão, cabe apenas destacarmos um ponto observado durante um dos testes realizados com o modelo enquanto este ainda estava em fase de desenvolvimento. Inicialmente, havíamos modelado a riqueza intrínseca dos indivíduos assumindo que o seu fluxo salarial seria determinístico (o que é equivalente na modelagem atual termos $p_{v,t}$ e φ iguais a 1). Entretanto, tal premissa era tão forte que deslocava a decisão ótima de alocação enquanto este ainda era jovem para uma posição de 100% no *portfolio* de mercado, independentemente dos valores atribuídos aos demais parâmetros. Sequer o efeito apresentado anteriormente para riquezas iniciais inferiores ao ponto crítico do indivíduo eram percebidos.

Isso ocorria porque, em não havendo incerteza com relação ao fluxo futuro de salários, a riqueza intrínseca do indivíduo estaria basicamente toda investida de uma forma livre de risco. Portanto, a riqueza financeira poderia ser aplicada integralmente no *portfolio* de mercado sem que isso representasse um aumento significativo do risco total. Tal fato somente deixava de ser observado à medida que o patrimônio inicial era suficientemente grande, baixando essa razão entre riqueza intrínseca e riqueza total, e assim observarmos o mesmo comportamento do modelo probabilístico para riquezas iniciais superiores ao ponto crítico. Essa foi a razão de termos desenvolvido a modelagem estocástica apresentada.

Seguindo com a análise, estudamos o comportamento do modelo quanto ao coeficiente de comprometimento da renda do indivíduo. Vimos que este apresenta uma influência secundária sobre a solução ótima. Ao observarmos na **Figura 5.3** o gráfico de consumo sobre o consumo mínimo do **Indivíduo A**, a menos dos últimos anos de vida a contribuição ótima supera com folga suas necessidades mínimas de consumo. Mesmo ao elevarmos ao máximo essa restrição (fazendo o comprometimento da renda igual a 85%), o **Indivíduo A** consegue atender seu consumo mínimo anual sem alterar suas políticas ótimas de contribuição e alocação,

ou seja, essa restrição não é ativa para indivíduos muito jovens (vide **Figura 5.12**). Somente para valores superiores a 90% nota-se algum impacto, porém conceitualmente não seria adequado que o indivíduo permanecesse num nível tão alto de comprometimento da renda e ainda contribuísse ao fundo de pensão.

Já no caso do **Indivíduo B**, que tem uma necessidade maior de acumulação de riqueza para financiar sua aposentadoria, variações acima de 70% nesse coeficiente causam ligeiras alterações nos seus níveis ótimos de contribuição, mas a decisão de alocação em ações permanece inalterada. A **Figura 5.12** apresenta um resumo da situação descrita com um gráfico da média da contribuição percentual ótima esperada ao longo da vida em função da razão de comprometimento da renda C_t^{subs}/L_t para diferentes idades. Os demais parâmetros são os mesmos adotados para o caso básico do **Indivíduo B**, lembrando que a riqueza inicial permanece constante para todas as idades.

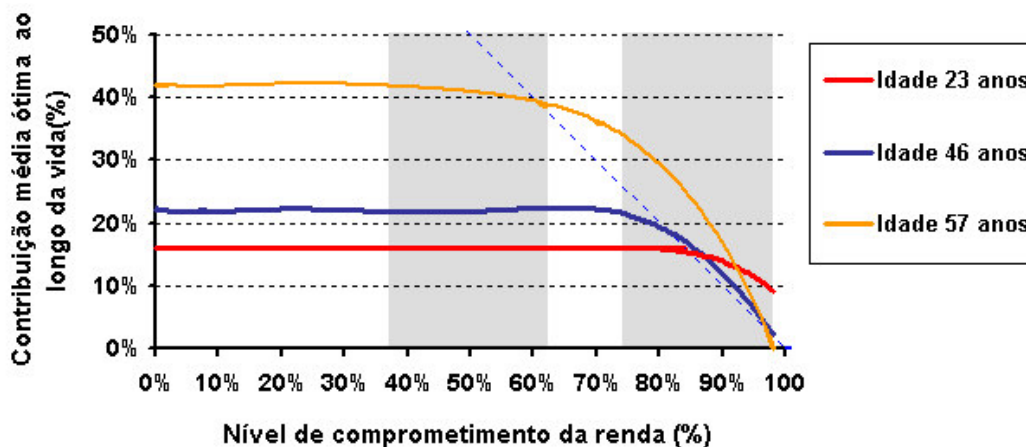


Figura 5.12 – Contribuição ótima média para diferentes níveis de comprometimento da renda e de idades iniciais e as bandas qualitativas de nível de comprometimento. Pontos à direita da linha tracejada implicam em utilidades negativas.

O efeito descrito acima aumenta à medida que os indivíduos estão mais próximos de suas aposentadorias, e somente pode ser observado para riquezas iniciais razoavelmente abaixo do ponto crítico. O principal determinante deste comportamento é o fato do indivíduo ter que acumular riquezas enquanto ainda está trabalhando para financiar o longo período em que não mais apresentará riqueza intrínseca. Quanto mais próxima a idade de aposentadoria, mais agressiva deve ser a

política de contribuição de quem não tem um grande patrimônio acumulado, para dessa forma maximizar sua utilidade. As curvas de contribuição da **Figura 5.12** são todas deslocadas para cima se desprezado o recebimento do benefício do INSS, sendo o movimento mais intenso nas curvas de idades mais avançadas (na ordem de 10%, enquanto para pessoas mais novas somente 2%).

As bandas qualitativas de nível de comprometimento da renda apresentadas na **Figura 5.12** foram utilizadas na atribuição dos valores de comprometimento para cada uma das diferentes situações de número de dependentes, que foi o critério adotado no Capítulo 4 para diferenciar os indivíduos quanto a esse parâmetro. Foram apresentados na **Tabela 4.3** os respectivos valores médios de cada banda, com o comprometimento máximo representando o indivíduo com um número maior de dependentes.

Retomando-se a discussão acerca do recebimento do benefício do INSS, não é apenas a política ótima contribuição que é sensível à sua consideração. A alocação ótima esperada em ações para idades superiores à idade de aposentadoria também muda. Por exemplo, a curva vermelha da **Figura 5.7** sofre um deslocamento paralelo para cima de aproximadamente 5% se considerarmos que o **Indivíduo C** recebe o benefício. De maneira análoga, as curvas de alocação ótima em ações das simulações dos **Indivíduos A e B** (**Figuras 5.2 e 5.4** respectivamente) são deslocadas em 5% para baixo para as idades superiores da 65 anos quando desprezado o benefício.

Para encerrar a análise de sensibilidade do modelo, cabe apresentarmos algumas considerações à respeito do fator de desconto temporal δ . O parâmetro δ , que de certa maneira quantifica a preferência entre consumos imediatos e consumos futuros, exerce uma forte influência sobre a contribuição ótima do indivíduo ao longo de sua vida. A redução generalizada da contribuição que se observa para valores de δ menores compromete o padrão de vida do indivíduo quando este se aposenta, por isso julgamos não ser apropriado a sua utilização.

Por outro lado, valores muito altos reduzem a contribuição nos primeiros anos de análise e aumentam seus valores à medida que se aproxima a idade de aposentadoria. Esse comportamento inconstante da contribuição não é desejável, pois o princípio do plano de aposentadoria complementar é que o indivíduo realize contribuições praticamente constantes ao longo de sua vida inteira. Dessa forma, o parâmetro δ apresentado no capítulo anterior é o que minimiza a dispersão da contribuição ótima esperada ao longo da vida do indivíduo. (vide **Figura 5.13**).

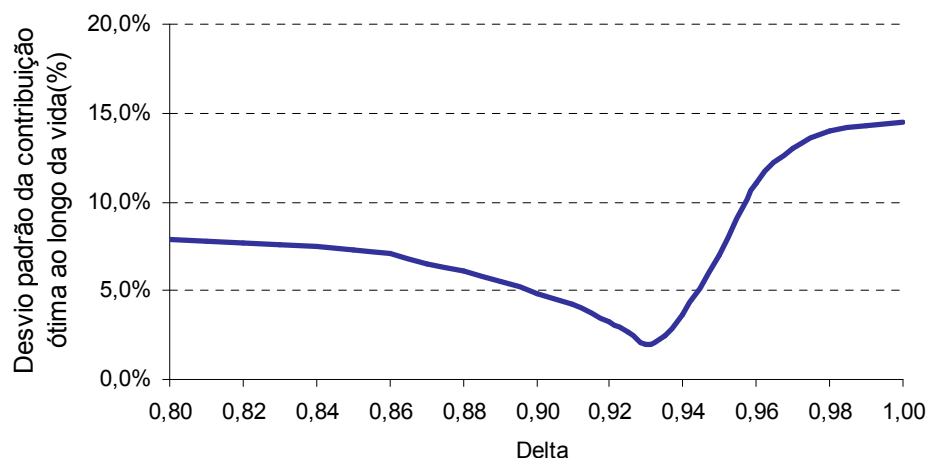


Figura 5.13 – Dispersão das contribuições ótimas ao fundo ao longo da vida dos indivíduos.

A dispersão da contribuição em função do parâmetro δ , bem como seu ponto de mínimo, independem da idade do indivíduo, sendo influenciados somente pelos parâmetros do CAPM adotados. Outra observação importante é o fato desta análise ser valida somente para valores de riqueza inicial abaixo do ponto crítico, pois para valores superiores a este o indivíduo passa a viver de seu patrimônio, consumindo além de seu salário, ou seja, realiza consistentemente saques no fundo.

5.7 Conclusões

Os resultados obtidos para cada um dos três tipos de indivíduo padrão analisados são considerados bastante satisfatórios. Inicialmente, as alocações ótimas em ações dos **Indivíduos A e B** podem parecer razoavelmente altas, 50% e 45% respectivamente, chegando a atingir 80% ao longo da vida no caso do **Indivíduo A**, conforme constatado pela simulação realizada. Entretanto, quando comparados com níveis de alocação médios dos fundos de pensão de alguns países desenvolvidos, os resultados obtidos não aparentam ser tão elevados (vide **Figura 5.14**).

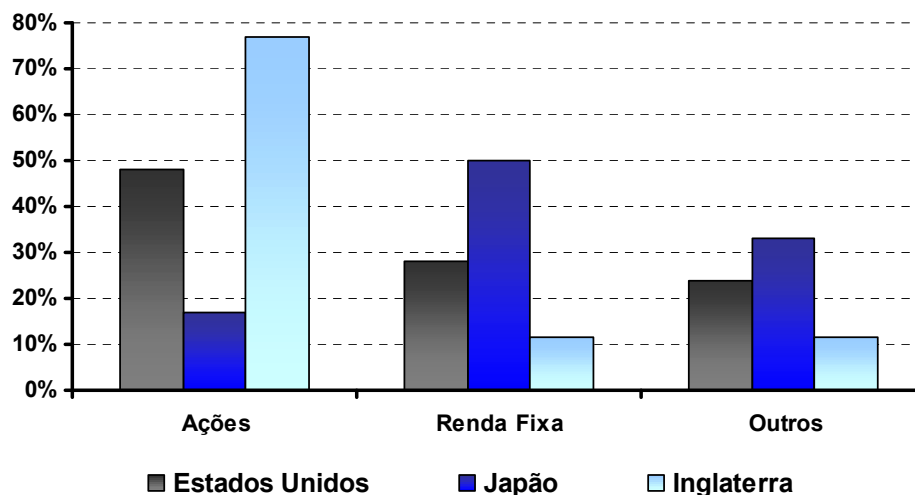


Figura 5.14 – Diversidade de alocação de ativos em 1995. Fonte: BOULIER; DUPRÉ, 2003.

A cultura de investimento em bolsa no Brasil ainda não é tão difundida como nestes países, onde as baixas taxas de juros reais¹ representam mais um incentivo para investimentos no mercado de ações. Outro aspecto importante no Brasil é a dominância que ainda existe de planos de previdência complementar do tipo benefício definido, nos quais a política de investimento é voltada para a minimização do risco de geração de déficit nas contas do plano, o que beneficia uma

¹ A taxa de juros reais de uma economia seria uma outra forma de se expressar sua taxa livre de risco, que é aproximadamente a rentabilidade obtida com títulos de renda fixa.

alocação maior nos ativos de renda fixa por apresentarem fluxos de caixa e prazos de vencimento pré-determinados (SAAD 2000).

Quando os objetivos são de longo prazo, as decisões de investimento devem efetivamente contemplar participações mais elevadas da bolsa, porém, o histórico brasileiro de crises financeiras e diferentes planos econômicos reduziu bastante o horizonte de análise das pessoas, que dificilmente vêem alguma segurança em investir em prazos de, por exemplo, mais de cinco anos. O modelo demonstrou que mesmo indivíduos que têm 46 anos de idade devem manter alocações da ordem de 45% de seu patrimônio em bolsa, pois em suma, ainda estão a 20 anos de suas aposentadorias.

Os principais parâmetros que sensibilizam a decisão ótima de alocação são a aversão a risco do indivíduo, sua idade, seu saldo inicial acumulado e a fração φ de seu salário que este recebe quando perde o emprego. Indivíduos com uma aversão a risco maior alocam uma fração menor de seu patrimônio em bolsa e vice versa, sendo observado esse efeito em todas as idades. Os outros três parâmetros mencionados interferem direta ou indiretamente sobre o efeito da riqueza intrínseca do investidor, que tem impacto imediato sobre a solução ótima de alocação.

A consideração da riqueza intrínseca tende a aumentar a participação da bolsa na carteira do indivíduo, sendo que quanto maior for a relação desta sobre a riqueza total do indivíduo, maior será sua influência. Em situações em que o investidor não apresenta esta riqueza, sua alocação em ações tende a ser relativamente baixa. A idade atual e o saldo inicial têm impacto direto sobre esse nível de influência: a idade tende a aumentar ou diminuir o montante de riqueza intrínseca do indivíduo, enquanto o saldo inicial atua sobre a razão entre riqueza intrínseca e riqueza total. A partir do ponto que definimos como ponto crítico de patrimônio financeiro inicial, a riqueza intrínseca passa a perder relevância, quando pode ser observado um decaimento da alocação ótima em ações. Já o parâmetro φ atua aumentando o risco da riqueza intrínseca em si, com a alocação em bolsa caindo sensivelmente com a redução dos valores de φ .

A decisão ótima de investimento também sofre uma pequena influência de variações nos parâmetros de probabilidade de perda do emprego e quando se considera o recebimento do benefício provindo do plano de previdência básica (INSS, por exemplo). Naturalmente, testamos também a sensibilidade das soluções ótimas aos parâmetros do CAPM, sendo que o modelo mostrou-se pouco sensível para variações dentro dos intervalos de valores viáveis destes parâmetros. Em outras palavras, para variações no prêmio de risco do mercado entre 5% e 8% (que são os limites apontados pela grande maioria das referências consultadas¹) a alocação em ações dos indivíduos mais jovens não chegou a oscilar 10%. Para valores fora destes limites a sensibilidade foi consideravelmente superior, porém hipóteses desta magnitude não são aceitas pela comunidade científica tampouco observadas na realidade.

Quanto à política de contribuições do indivíduo ao fundo de pensão, as soluções ótimas estão de acordo com a maioria das recomendações que já são feitas hoje pelas fundações a seus participantes. O modelo apresentou um comportamento bastante interessante quanto aos indivíduos que já estão mais próximos de suas aposentadorias e não têm um saldo acumulado que viabilize a manutenção de seus padrões de vida. Para esse tipo de pessoa, a recomendação ótima é aumentar a contribuição paralelamente ao aumento da alocação em ações, para assim maximizar a sua riqueza. Entretanto, essa contribuição não é levada ao máximo de sua contribuição possível (dada pela restrição de comprometimento mínimo da renda), pois isso resultaria em utilidade totais menores.

A solução ótima de contribuição do indivíduo é basicamente afetada por sua riqueza inicial, seu comprometimento mínimo de renda e pelo fator de desconto temporal δ .

O sexo dos indivíduos mostrou ter uma pequena influência sobre a idade a partir da qual a alocação em ações começa a cair, devido basicamente à hipótese

¹ Brealey; Myers; Marcus (1999), Haugen (1997) e Gitman (2002).

assumida de que as mulheres se aposentam 5 anos antes dos homens. A solução ótima de contribuição só é afetada por esse parâmetro na medida em que a idade de aposentadoria está próxima, pois é quando a diferença de 5 anos de contribuição a mais ou a menos passa a ter alguma significância.

Conforme já mencionamos, a análise de sensibilidade realizada teve por objetivo facilitar a compreensão do comportamento do modelo e a identificação de seus parâmetros mais relevantes. Para que um leitor menos acostumado com uma notação técnica mais avançada (que é o caso da grande maioria dos clientes do banco) também pudesse entender o conteúdo exposto e seus objetivos, demos preferência por apresentar os resultados da análise através de uma maneira mais informal, em detrimento de um maior rigor técnico.

 capítulo 6

**APLICAÇÃO A UM PLANO DE
CONTRIBUIÇÃO DEFINIDA – UM
ESTUDO DE CASO**

CAPÍTULO 6: APLICAÇÃO A UM PLANO DE CONTRIBUIÇÃO DEFINIDA – UM ESTUDO DE CASO

6.1 Introdução e descrição do problema

Conforme sugerido no Capítulo 2, a administração dos planos de previdência complementar do tipo contribuição definida deveria propiciar a segmentação de perfis, na qual a gestão de longo prazo dos recursos de cada participante seria feita individualmente, maximizando-se assim suas utilidades individuais. Nos planos abertos de previdência complementar é possível a adoção dessa estratégia, entretanto, quando o indivíduo faz parte de uma massa de participantes de um plano fechado, esta segmentação não é mais tão simples, principalmente no que se refere à política de alocação em ações.

Existe uma série de restrições operacionais, culturais e legais impedindo que o nível de alocação em ações da conta previdenciária de cada participante de um fundo de pensão seja gerido independentemente. Os atuais sistemas de informação controlam de maneira eficaz o saldo em conta do participante, entretanto ainda não existe um sistema que viabilize que cada participante possua mais de um plano (idealmente, um só de renda fixa e outro só de ações, transferindo recursos de um para o outro de forma a atender o nível ótimo de alocação em ações do indivíduo).

As restrições culturais e legais, que são as mais importantes, dizem respeito à delegação de responsabilidades no relacionamento entre participante e fundação. Historicamente, as fundações são as responsáveis legais pela gestão das contribuições e pelo pagamento dos benefícios dos participantes. Isso decorre do fato de que a maioria dos participantes não tem capacitação técnica para assumir total responsabilidade sobre suas decisões de investimento. Ao permitir que estes tomem suas decisões, abre-se um potencial de conflito caso os objetivos de rentabilidade não sejam atingidos.

Atualmente, na maioria dos planos do tipo contribuição definida, os recursos de todos os participantes são geridos através de uma carteira básica, independentemente das utilidades de cada um. As fundações têm buscado melhorar esta situação, dadas todas as restrições salientadas acima, oferecendo a seus participantes algumas opções de planos com diferentes níveis de alocação média em ações, ao invés de apenas uma opção com uma carteira básica. A tentativa é a de adequar melhor o plano às necessidades ótimas de alocação de cada participante.

Porém, tanto o aconselhamento ao participante na hora da escolha a qual plano aderir quanto a definição destes diferentes níveis de alocação não são feitos com base em critérios quantitativos. Dessa forma, apesar desta segmentação em vários planos, é pouco provável que o participante tome uma decisão que maximize sua utilidade. Pode ocorrer inclusive a situação em que o participante conheça seu nível ótimo de alocação em ações, mas a efetiva implementação desta pode não ser viável devido à inexistência de um plano com este nível específico.

O objetivo deste estudo de caso é, com base no modelo desenvolvido e dadas as atuais restrições e a proposta de oferecer algumas opções de planos com diferentes alocações médias em ações, determinar quais são estes níveis a serem adotados para cada opção. Isso será definido de forma a satisfazer à necessidade da maioria dos participantes. Também deve ser elaborado um critério sistemático de recomendação de escolha de plano e definição da contribuição mensal de cada um dos participantes, de modo a garantir a manutenção de seus padrões de vida após a aposentadoria, observando apenas que, para planos muito grandes, é impraticável a otimização individualizada para cada participante devido a restrições computacionais.

Este estudo foi feito com os dados do plano básico de previdência complementar dos funcionários de uma das empresas patrocinadoras do fundo de pensão multipatrocinado administrado pelo banco. Escolhemos uma empresa razoavelmente pequena para facilitar o estudo (326 participantes). Os dados foram mascarados pois se tratam de informações confidenciais do cliente.

Na seção 6.2 daremos seqüência ao estudo, onde serão apresentadas algumas possíveis formas de solução do problema e faremos uma descrição em detalhes do método utilizado. Paralelamente, descreveremos os dados e as características do plano que serviu de base para esse estudo. Na seção 6.3 encerraremos com os resultados obtidos e com a elaboração de uma proposta de segmentação do plano atual.

6.2 Método de solução e análise dos dados

A solução poderia ser dada de uma forma relativamente trivial, uma vez que, aplicado o modelo e determinadas as alocações e contribuições ótimas de cada um dos participantes do plano escolhido, bastaria agrupá-los nos diferentes planos por suas alocações ótimas através de um algoritmo de *clustering*. (HARTIGAN, 1975). A alocação a ser administrada para cada um destes planos seria a respectiva alocação do centro de cada *cluster*. A contribuição é ainda mais simples, pois independe do plano, com cada participante contribuindo individualmente com o quanto pode ou acha que deve, já que o atual sistema de informações da fundação é capaz de gerenciar corretamente o saldo acumulado em conta.

Entretanto, com os atuais recursos computacionais e a limitação do *software* desenvolvido, que otimiza apenas um indivíduo de cada vez, torna-se impraticável a obtenção da estratégia ótima de gestão dos recursos para todos os 326 participantes do plano através do modelo.

O problema pode ser abordado de duas formas distintas. A primeira seria a de melhorar os recursos computacionais disponíveis do banco, para que as otimizações possam ser feitas para todos os indivíduos, ou mesmo redesenhar o programa, para que este receba de forma conjunta os dados de todos os participantes, possibilitando que as otimizações sejam executadas de uma única vez, levando o tempo que for necessário.

A segunda opção, e a que utilizamos na resolução deste estudo, é a de agrupar todos os participantes do plano através de seus dados cadastrais segundo alguns critérios que impliquem em alocações e contribuições ótimas semelhantes. Optamos por essa solução pois esta ainda seria viável ao determinar a política ótima para um plano com milhares de participantes.

Conforme verificamos no Capítulo 5, diversos são os parâmetros do modelo que causam efeito sobre as decisões ótimas de alocação e contribuição do indivíduo. Vimos que os que são mais influentes sobre a política ótima de alocação são a aversão ao risco, a riqueza inicial, o risco salarial φ e a idade do indivíduo. Já a política ótima de contribuição é mais sensível à necessidade de acumulação de riqueza (que também tem impacto sobre a alocação) e o fator de desconto temporal δ . Alguns destes porém, podem ser considerados os mesmos para todos os participantes ligados a mesma empresa, pois se tratam de aspectos do mercado de trabalho (φ) ou são gerais do modelo (δ). Dessa forma, agruparemos os participantes nas quatro dimensões a seguir:

1. Aversão a risco;
2. Idade;
3. Riqueza inicial medida em salários atuais;
4. Necessidade de acumulação de riqueza.

É importante salientar que, por questões comerciais, de *compliance* interno e de imagem do banco, este projeto piloto de implementação foi realizado sem o envolvimento da empresa patrocinadora, pois se trata de um trabalho acadêmico que ainda não é um produto do banco. Assim, os estudos apresentados no Capítulo 4 que requerem uma interação maior entre a empresa e o banco não puderam ser realizados, portanto, assumimos quando necessário os valores e as dinâmicas de evolução dos parâmetros conforme resumidos na **Tabela 4.4**.

O parâmetro de aversão ao risco se enquadra nessa situação, sendo um dado extremamente necessário que deveria ser obtido diretamente de cada participante através da aplicação do questionário desenvolvido e exposto no Anexo A. Pelos

motivos apontados acima, geramos aleatoriamente valores para este parâmetro, o que não invalida as conclusões a respeito do método que serão apresentadas. Os indivíduos foram então agrupados segundo os cinco perfis de risco definidos no Capítulo 4.

A segunda dimensão se refere à idade inicial dos indivíduos. Para que não fosse necessária a distinção entre homens e mulheres, trabalhamos com o prazo para a aposentadoria ao invés da idade inicial. Neste estudo, preferimos desconsiderar as 6 pessoas da amostra selecionada que já estão em idade de aposentadoria, porém continuam contribuindo ao plano complementar. A consideração destas aumentaria a análise em mais uma dimensão, enquanto é mais fácil determinar diretamente os valores ótimos para cada uma delas.

Com base nas expectativas de evolução da alocação ótima em ações com a idade apresentadas nas **Figuras 5.2 e 5.4**, dividimos os participantes em 3 grupos de idade. O primeiro é o dos que estão a 10 anos de se aposentarem e já deveriam estar reduzindo seus níveis de alocação em ações. O segundo é dos que estão entre 11 e 25 anos da aposentadoria, que é quando suas alocações teoricamente seriam as máximas, e o terceiro é o das pessoas que estão a mais de 26 anos de se aposentarem. Na **Figura 6.1** temos o histograma da distribuição etária do plano.

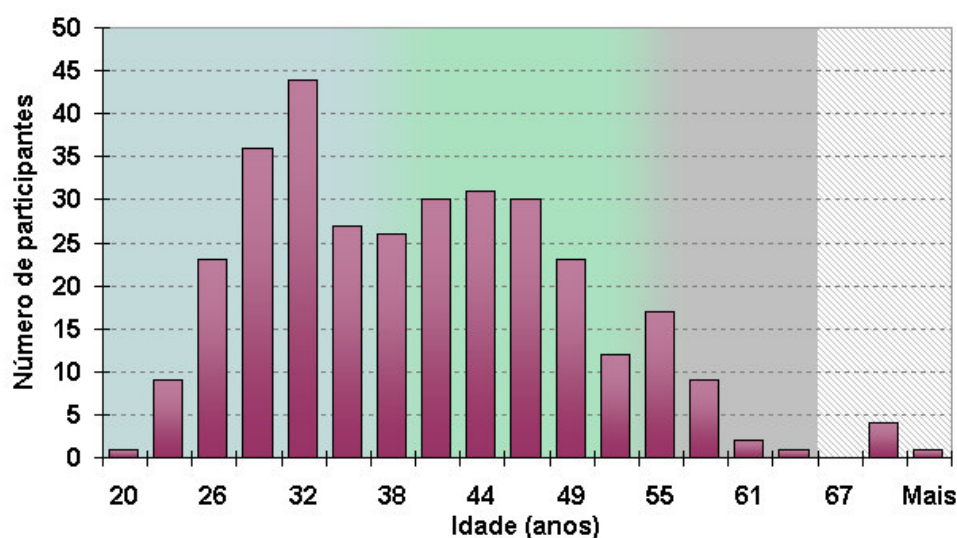


Figura 6.1 – Distribuição etária do plano estudado e as três faixas de idade consideradas. Indivíduos com mais de 65 anos foram excluídos do estudo.

Outra dimensão em que classificamos os participantes do fundo é a riqueza inicial, pois esta tem um impacto direto na determinação dos pontos críticos de alocação de cada um. A riqueza inicial pode ser considerada como o saldo acumulado no fundo, medido em número de salários atuais. Na **Figura 6.2** temos um gráfico de dispersão destes saldos em função do tempo para a aposentadoria de cada indivíduo. Dividimos os participantes em duas classes de riqueza inicial, como também pode ser visto na **Figura 6.2**.

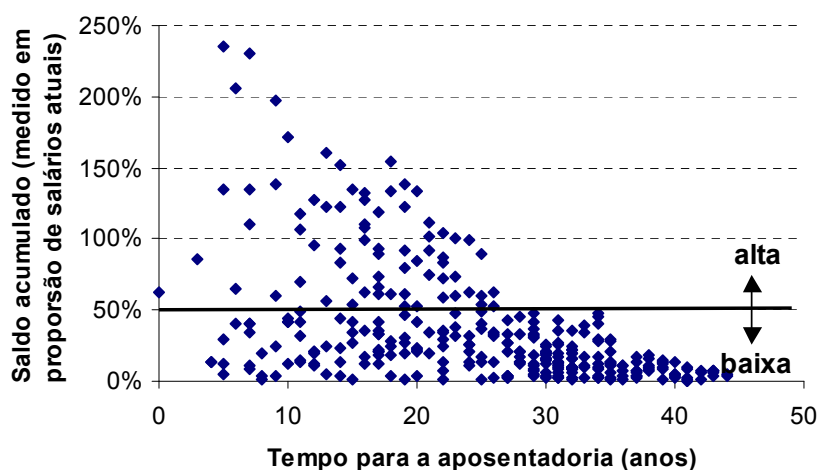


Figura 6.2 – Dispersão dos participantes por saldo acumulado e idade, e as duas divisões de riqueza inicial.

Constatamos que é bastante provável que todos os indivíduos do plano estudado estejam abaixo de seus respectivos pontos críticos. Na **Figura 6.2** são identificados claramente dois grupos em função da riqueza inicial: o dos que já acumularam uma certa riqueza para suas aposentadorias e os que começaram a pensar nisso há pouco tempo, e conseqüentemente não têm quase nada. Naturalmente, todas as pessoas mais jovens se posicionam no segundo caso.

Por fim, a necessidade de acumulação de riquezas é a única dimensão listada anteriormente que não pode ser determinada diretamente dos parâmetros do modelo. Não há uma forma certa de quantificarmos este efeito, porém um número que mostrou um razoável poder discricionário foi a divisão de todo o consumo de subsistência esperado do indivíduo por sua expectativa salarial.

$$i = \frac{\sum_{t=t_0}^T C_t^{subs}}{\sum_{t=t_0}^T L_t} \quad (6.1)$$

Neste indicador são levados em conta os impactos do número de dependentes, do nível de escolaridade e da consideração do benefício básico do INSS. Dividimos os participantes do plano em dois grupos, os com necessidade alta ($i > 0,75$) e baixa ($i < 0,75$). O valor 0,75 foi identificado empiricamente como o valor a partir do qual este efeito pode ser observado.

Uma vez especificadas as quatro dimensões em que os participantes são classificados, definem-se indivíduos fictícios a partir das médias dos valores dos participantes agrupados em cada uma das classes. Para esses indivíduos fictícios são obtidas as soluções ótimas de alocação em ações e contribuição, que assumimos serem as mesmas para todos os indivíduos desta mesma classe.

Dessa forma, pela proposta apresentada, não seria mais necessária a determinação das políticas ótimas de todos os participantes, mas somente dos indivíduos fictícios representantes de cada uma das 60 classes¹ criadas. O método proposto não oferece a solução ótima para cada um dos participantes, portanto não apresenta grande vantagem para planos pequenos, entretanto, o ganho computacional é substancial para planos com um número elevado de participantes.

Na próxima seção apresentaremos os resultados obtidos com a aplicação do método descrito e uma proposta de reestruturação do plano atual em um plano com 4 opções de carteira com diferentes alocações.

¹ (5 perfis de risco) * (3 faixas etárias) * (2 níveis de riqueza inicial) * (2 níveis de necessidade de acumulação de riqueza)

6.3 Resultados obtidos e proposta de planos

Os participantes do plano estudado foram agrupados nas suas respectivas classes segundo os critérios apresentados na seção anterior. O número de participantes em cada uma das classes, bem como suas respectivas alocações em ações e contribuições ótimas são apresentados na **Tabela 6.1**.

Baixa Necessidade de Acumulação										
Tempo para a aposentadoria		Mais de 26 anos			Entre 9 e 25 anos			Menos de 10 anos		
Perfil de risco	Riqueza inicial	nº de part.	Alocação	Contribuição	nº de part.	Alocação	Contribuição	nº de part.	Alocação	Contribuição
Defensivo	Baixa	18	25%	20%	7	25%	26%	2	25%	29%
	Alta	0	-	-	1	40%	22%	1	15%	22%
Conservador	Baixa	31	45%	20%	6	40%	26%	3	25%	27%
	Alta	0	-	-	3	55%	22%	0	20%	22%
Moderado	Baixa	24	55%	19%	4	65%	25%	3	30%	27%
	Alta	0	-	-	1	70%	22%	1	25%	22%
Arrojado	Baixa	23	60%	19%	7	70%	24%	1	35%	25%
	Alta	0	-	-	4	80%	20%	0	-	-
Agressivo	Baixa	19	70%	18%	3	75%	23%	1	35%	25%
	Alta	0	-	-	1	90%	20%	0	-	-

Alta Necessidade de Acumulação										
Tempo para a aposentadoria		Mais de 26 anos			Entre 11 e 25 anos			Menos de 10 anos		
Perfil de risco	Riqueza inicial	nº de part.	Alocação	Contribuição	nº de part.	Alocação	Contribuição	nº de part.	Alocação	Contribuição
Defensivo	Baixa	9	25%	22%	10	30%	36%	1	70%	45%
	Alta	0	-	-	10	45%	32%	2	40%	41%
Conservador	Baixa	14	45%	22%	23	45%	35%	0	70%	45%
	Alta	0	-	-	3	60%	32%	1	45%	41%
Moderado	Baixa	7	55%	22%	11	60%	35%	3	80%	45%
	Alta	0	-	-	2	80%	30%	1	50%	40%
Arrojado	Baixa	7	60%	21%	17	75%	35%	1	90%	45%
	Alta	0	-	-	11	90%	30%	1	55%	40%
Agressivo	Baixa	9	70%	20%	8	85%	34%	0	-	-
	Alta	0	-	-	4	100%	30%	0	-	-

Tabela 6.1 – Recomendações ótimas de alocação em ações e contribuição para todas as possíveis classificações dos participantes do plano.

Na **Figura 6.3**, temos a frequência da solução ótima de alocação observa na **Tabela 6.1**, incluindo também os 6 participantes que já estão em idade de aposentadoria.

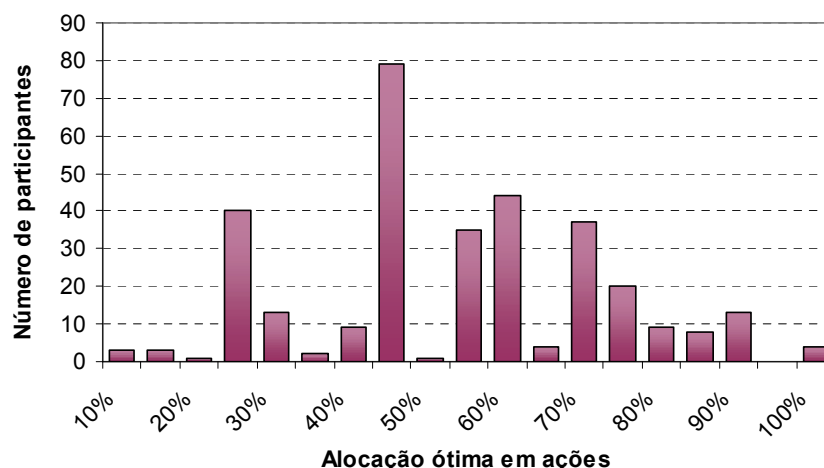


Figura 6.3 – Frequência das decisões ótimas de alocação em ações.

Com base na frequência observada na **Figura 6.3**, sugerimos a criação de 4 diferentes tipos de planos, com as respectivas faixas de alocação em ações apresentadas na **Figura 6.4**. O **Plano 2**, por exemplo, é direcionado para os indivíduos que necessitam uma alocação em ações entre 15% e 40%. A média da alocação deste plano, ponderada pela frequência de participantes com cada nível de alocação (vide **Figura 6.3**) é de 28%.

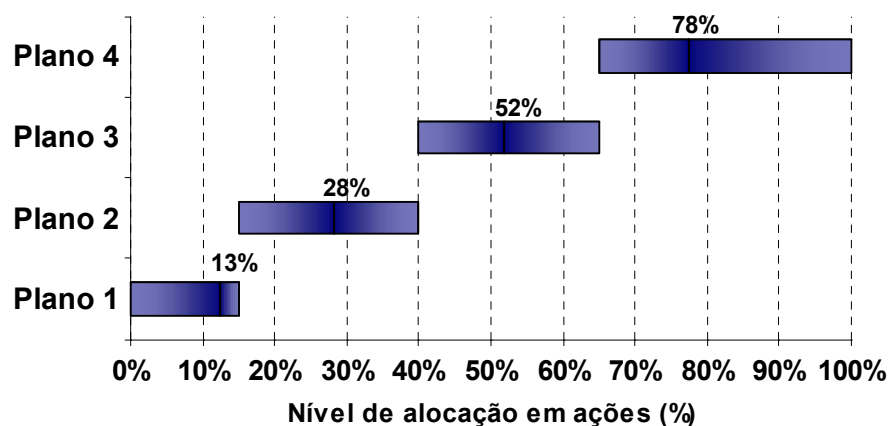


Figura 6.4 – Proposta de 4 planos, com seus respectivos limites e valores médios de alocação em ações.

Com relação à situação atual, em que os recursos de todos os participantes são investidos em uma carteira básica com 20% de alocação média em ações, a proposta acima representa um ganho esperado de utilidade para 98% dos

participantes do plano (adotando-se uma alocação equivalente ao valor médio apresentado na **Figura 6.4**). Esta análise é descrita em detalhes no Apêndice VII.

Com o método descrito neste estudo de caso, atinge-se o objetivo final deste trabalho, que é o de se obter uma solução ótima para a gestão dos recursos de um plano de previdência complementar CD como um todo, dado que estes atualmente apresentam sérias restrições operacionais e legais, inviabilizando a perfeita segmentação de perfis e conseqüente otimização individualizada por participante, conforme sugerido no Capítulo 2.

A partir de seus dados cadastrais e do uso da **Tabela 6.1**, pode ser dada a qualquer indivíduo uma recomendação quantitativamente fundamentada de como este deve investir seus recursos através do plano estudado, de forma a aumentar as suas chances de ter, no futuro, uma aposentadoria com manutenção de seu padrão de vida.

A principal razão da elaboração deste estudo de caso foi de transformar o modelo teórico desenvolvido neste trabalho em um produto que efetivamente pode, e será comercializado pelo banco, sendo vendido como um serviço ainda único no Brasil para os fundos de pensão ou utilizado como um diferencial na gestão dos planos de previdência aberta administrados pelo próprio banco.

apítulo 7

CONCLUSÃO

CAPÍTULO 7: CONCLUSÃO

Neste trabalho, buscamos desenvolver respostas para as duas perguntas clássicas, e extremamente complexas, da formação de poupança de longo prazo dos indivíduos, que são quanto poupar e como investir, com o objetivo de assegurar uma aposentadoria com manutenção do padrão de vida. Vimos que é uma tendência mundial as pessoas passarem a contribuir com parte de seus salários a planos privados de previdência complementar (abertos ou fechados), uma vez que os benefícios oriundos da Previdência Pública não são mais capazes de garantir-lhes este objetivo. Nesse contexto, desenvolvemos um modelo quantitativo para auxiliar e fundamentar a administração destes planos.

Foram estudados ao longo deste trabalho diversos modelos de otimização, com o intuito de se chegar a um que pudesse ser utilizado na determinação da estratégia ótima de administração dos recursos de um plano de previdência complementar do tipo contribuição definida. Em comparação com a classe de planos do tipo benefício definido, muito pouco tem sido criado na literatura especificamente para os primeiros, apesar dessa a classe apresentar o maior potencial de crescimento.

Compreendemos e adaptamos para o caso brasileiro um modelo estocástico multi-período bastante sofisticado, apresentado em Campbell; Viceira (2001) para a gestão de longo prazo dos recursos de um indivíduo. Realizamos algumas simplificações que facilitaram sua implementação, mas que ao mesmo tempo não eliminaram seu grande diferencial, que é a consideração da riqueza intrínseca dos investidores e os riscos inerentes a ela em suas decisões de investimento de longo prazo. Um possível objeto de estudo futuro nessa linha seria o de desenvolver uma evolução da modelagem apresentada para a riqueza produtiva, de forma a levar em consideração a correlação inerente entre os choques aleatórios ao salário do indivíduo e os choques ao *portfolio* de mercado, que foi desprezada neste trabalho.

Discutimos também os métodos para a determinação dos parâmetros do modelo, tendo-se em vista que a qualidade dos resultados da otimização depende fundamentalmente das especificações de entrada. Cabe destacar o questionário para a determinação do perfil de risco dos investidores, cuja elaboração se fez necessária dado que a instituição financeira onde este trabalho foi feito não possuía um de antemão.

Analizamos a fundo os resultados obtidos com o modelo, bem como seu comportamento perante variações em seus parâmetros. Identificamos os parâmetros mais influentes sobre as decisões ótimas de alocação em ações e contribuição ao plano de aposentadoria, quantificando seus efeitos. Demos preferência por apresentar os resultados obtidos com um menor rigor técnico, para que um leitor menos habituado com essa abordagem pudesse compreender plenamente o conteúdo exposto. Esse é o caso da grande maioria dos clientes do banco para quem este modelo se destina.

As atuais restrições a que as fundações estão sujeitas na implementação e na administração dos planos de previdência complementar de seus participantes motivaram o desenvolvimento do estudo de caso apresentado. Dado que a plena segmentação de perfis na administração de planos do tipo contribuição definida ainda não é possível, e não o será no horizonte previsível, elaboramos uma proposta de reestruturação de um plano real em 4 diferentes planos com diferentes níveis de alocação em ações, para assim aumentar a satisfação de cada participante individualmente. Esse método constitui um avanço significativo com relação à situação atual, e introduz as bases da transição para o modelo ideal. Além disso, viabiliza o principal objetivo do banco ao promover este trabalho acadêmico, que é a comercialização do modelo de otimização desenvolvido.

A linha de produtos e a estratégia de negócios da administradora de recursos de terceiros em que este trabalho foi realizado estão voltadas para a busca de vantagem competitiva através de uma imagem de excelência em inovação e qualidade do serviço prestado. É neste contexto que ganham importância os

Trabalhos de Formatura elaborados na instituição. Este trabalho é a seqüência de um longo projeto que envolve o desenvolvimento de novas ferramentas voltadas para a gestão de recursos previdenciários, que foi iniciado em 2000 por Nicolas Saad, ao estudar modelos voltados para planos do tipo benefício definido.

Com a tendência de aumento do número de planos do tipo contribuição definida em detrimento dos planos BD, e dado que pouco foi desenvolvido especificamente para esse tipo de plano, este trabalho é bastante relevante para a condução das estratégias da empresa, e representa uma ferramenta única no mercado brasileiro.



QUESTIONÁRIO PARA DETERMINAÇÃO DO PERFIL DE RISCO DO INVESTIDOR

ANEXO A: QUESTIONÁRIO PARA DETERMINAÇÃO DO PERFIL DE RISCO DO INVESTIDOR

Uma dificuldade encontrada durante o levantamento dos parâmetros do modelo é que o banco onde este trabalho foi realizado não possuía um questionário para determinação do perfil de risco de seus clientes de pequeno e médio porte. Fez-se necessária então, a elaboração de um questionário deste tipo, pois o parâmetro de aversão a risco γ é um dos principais determinantes da política ótima de contribuição e alocação do fundo.

Desta maneira, e nos baseando no estudo de diversos questionários existentes nas páginas eletrônicas de outras instituições financeiras nacionais e estrangeiras, compilamos uma lista com 18 perguntas, estruturada nos quatro grandes tópicos fundamentais, conforme apresentado no Capítulo 4:

1. Horizonte de investimento
2. Objetivos do investidor
3. Comportamento perante o risco.
4. Experiências e conhecimentos de mercado

O questionário classifica os investidores em 5 classes de propensão ao risco, que são as mesmas utilizadas, por exemplo, pela área de *private banking* para diferenciar seus clientes. Todas as perguntas selecionadas, ou criadas, são do tipo múltipla escolha e serão apresentadas logo a seguir. Ao lado de cada alternativa consta a pontuação que deve ser contabilizada de acordo com a resposta assinalada. A maioria das questões admite apenas uma resposta, e para as que possibilitam mais de uma marcação, o critério estabelecido está descrito logo abaixo da pergunta. O valor de cada alternativa não deve ser impresso no formulário entregue ao cliente.

As questões de 1 a 3 dizem respeito ao horizonte de investimento. Sua contabilização é feita de maneira diferenciada das demais perguntas, sendo que a

forma o motivo disso explicaremos logo em seguida. As questões de 4 a 18 compreendem os demais temas. A pontuação obtida em cada uma destas questões deve ser somada de forma simples, com os resultados variando entre um valor mínimo de zero (mais conservador) e máximo de cem (mais agressivo). Cada questão tem um peso diferente no questionário, que depende basicamente do seu grau de significância dentro do assunto a que ela se refere. O assunto “objetivos do investidor” tem um peso total de 20% no questionário, sendo representado pelas questões 4 e 5. As questões de 6 a 14 se referem ao comportamento perante ao risco do investidor, com uma relevância de 60% do total. Os demais 20% abordam os conhecimentos e hábitos do cliente. Optamos por atribuir um peso relativamente baixo ao tema objetivos do investidor, dado que, a princípio, todas as pessoas que estiverem preenchendo este questionário estão pensando nas suas aposentadorias. Este tema deverá ter seu peso revisado em uma eventual utilização deste questionário para qualquer que seja outro objetivo.

O quesito horizonte de investimento está sendo abordado de maneira diferenciada, pela simples razão de que suas observações atuam somente no sentido de reduzir uma eventual propensão elevada a riscos de uma pessoa mais velha, ou que possa necessitar dos recursos investidos num horizonte de tempo mais curto. O fato de uma pessoa altamente avessa ao risco ser mais nova, não implica nada que esta irá tolerar uma oscilação maior nos preços de seus ativos.

Portanto, o resultado do questionário deve ser computado pela seguinte expressão:

$$Resultado = \left(\prod_{i=1}^3 p_i \right) * \left(\sum_{i=4}^{18} p_i \right)$$

onde p_i é a nota obtida na i -ésima questão.

Através deste resultado, os investidores são classificados nas seguintes categorias qualitativas de perfil de risco:

Perfil de risco	Nota obtida no questionário
Defensivo	Entre 0 e 20
Conservador	Entre 20 e 40
Moderado	Entre 40 e 60
Arrojado	Entre 60 e 80
Agressivo	Entre 80 e 100

Tabela A.1 – Determinação do perfil de risco do investidor através da nota obtida no questionário.

O questionário elaborado pode ser visto logo seguir, lembrando que, o peso de cada alternativa não deve ser impresso na versão entregue ao cliente.

QUESTIONÁRIO

Esse questionário foi elaborado com o objetivo de nos auxiliar na identificação de seu perfil de risco, para que possamos recomendar-lhe as opções de investimento que mais se adequem a seus objetivos de risco e retorno. As informações fornecidas serão tratadas no maior sigilo, e serão utilizadas com essa única finalidade. Lembre-se, quanto mais fieis e sinceras forem suas respostas, melhor será a qualidade da recomendação de investimentos que poderemos lhe oferecer. Caso você julgue que, em uma ou mais perguntas, nenhuma das alternativas apresentadas está de acordo com a sua resposta, marque, por favor, a que mais se assemelha.

Para começar, gostaríamos de saber algumas informações pessoais sobre você.

1. Qual a sua faixa etária?

- ☐ Menos do que 25 anos. (1)
- ☐ Entre 26 e 35 anos. (0,95)
- ☐ Entre 36 e 50 anos. (0,90)
- ☐ Entre 51 e 60 anos. (0,85)
- ☐ Mais do que 60 anos. (0,75)

2. Quantas pessoas dependem financeiramente de você?

- ☐ Nenhuma. (1)
 - ☐ 1. (0,95)
 - ☐ 2. (0,90)
 - ☐ Mais do que 2. (0,80)
-

3. Quanto aos recursos que serão destinados ao plano de previdência complementar, qual afirmação está mais de acordo quanto a seus objetivos e horizonte de investimento?

- ☐ Não pretendo resgatar os recursos investidos no plano antes da minha aposentadoria. Acredito dispor de reservas em outros investimentos que cobram necessidades emergenciais, como por exemplo, acidentes, doenças, etc. (1)
- ☐ Não pretendo resgatar os recursos investidos no plano antes da minha aposentadoria, a menos que ocorra algum evento inesperado que me force a sacar parte, ou todo o dinheiro investido. (0,90)
- ☐ Estou contribuindo agora ao plano de previdência complementar, mas pretendo sacar os recursos em um futuro próximo para comprar um outro bem, como por exemplo, uma casa própria ou um carro. (0,85)

As próximas duas questões dizem respeito a seus objetivos de investimento.

4. Com qual das afirmativas você mais se identifica:

- ☐ Minha prioridade está em obter uma alta rentabilidade no longo prazo, e não me importo com possíveis quedas no decorrer do período. (13)
- ☐ Eu busco tanto segurança quanto uma boa rentabilidade no longo prazo, mas me preocupo mais com a rentabilidade. (9)
- ☐ Eu busco tanto segurança quanto uma boa rentabilidade no longo prazo, mas me preocupo mais com a segurança. (5)
- ☐ Eu estou disposto a aceitar uma rentabilidade um pouco menor no longo prazo em troca de evitar alguma queda (0)

5. Fazendo-se uma análise de longo prazo, as ações apresentaram uma rentabilidade média anual de 12% acima da inflação nos últimos 30 anos. No mesmo período, os títulos de renda fixa apresentaram uma valorização média de 7% e caderneta de poupança 2% sobre a inflação no Brasil. Qual você espera ser a valorização média dos seus investimentos nos próximos anos?

- ☐ Se o meu investimento superar a inflação, já estarei satisfeito. (0)
- ☐ Algo entre 3% e 5% ao ano além da inflação. (2)
- ☐ Algo entre 5% e 8% ao ano além da inflação. (4)
- ☐ Algo entre 8% e 12% ao ano acima da inflação. (6)
- ☐ Mais do que 12% ao ano acima da inflação. (7)

Fale-nos agora um pouco sobre o seu comportamento perante o risco.

6. Nas suas decisões financeiras, relativamente, qual você considera ser o seu perfil de risco?

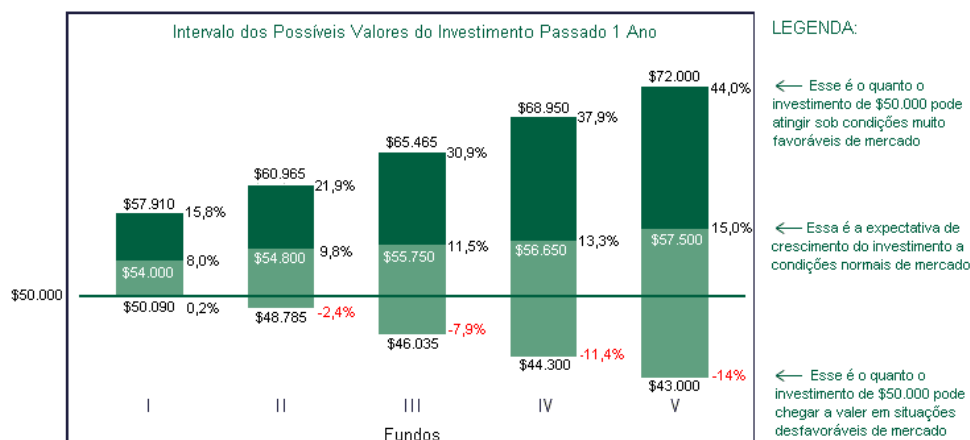
- ☐ Considero-me muito conservador. (0)
- ☐ Sou relativamente conservador. (2)
- ☐ Aceito tomar um pouco de risco. (3)
- ☐ Sou um investidor relativamente propenso ao risco. (5)
- ☐ Sou bastante agressivo nas minhas decisões de investimento. (8)

7. Qual das seguintes afirmativas melhor descreve sua reação diante de uma repentina variação negativa de 15% na cota do seu fundo de pensão em um período de seis meses?

- ☐ Eu ficaria muito preocupado, porque essa variação negativa pode colocar em risco a minha aposentadoria. (0)
 - ☐ Apesar de estar realizando um investimento de longo prazo, não me sinto confortável com variações negativas dessa magnitude. (3)
 - ☐ Se eu receber na minha aposentadoria pelo menos todo o capital que eu apliquei ao fundo ao longo da minha vida, não ficarei preocupado. (2)
-

- ☐ Investimentos de longo prazo podem apresentar, em curtos espaços de tempo, variações negativas devido a flutuações de mercado, mas tendem a ser mais lucrativos. (8)
 - 8. Qual significado da palavra “risco”, no contexto financeiro, que primeiro vem a sua mente?
 - ☐ Perigo. (0)
 - ☐ Incerteza. (2)
 - ☐ Oportunidades de ganho. (4)
 - ☐ Emoção. (5)
 - 9. Se você tivesse que escolher entre um trabalho que lhe oferecesse maior garantia de emprego ou uma perspectiva de crescimento salarial mais forte, qual seria a sua opção?
 - ☐ Com certeza, prefiro maior estabilidade de emprego, mesmo com um menor crescimento salarial. (0)
 - ☐ Provavelmente escolheria pela proposta de maior estabilidade com menor crescimento salarial. (1)
 - ☐ Não sei. (3)
 - ☐ Provavelmente preferiria um crescimento salarial mais acentuado com uma menor estabilidade. (5)
 - ☐ Com certeza, optaria por maior expectativa de crescimento salarial em detrimento de estabilidade no emprego. (6)
 - 10. Ao tomar decisões financeiras com o que você se preocupa primeiro?
 - ☐ Sempre com as possíveis perdas. (0)
 - ☐ Na maioria das vezes, com as perdas possíveis. (1)
 - ☐ Na maioria das vezes, com o que tenho para ganhar. (3)
 - ☐ Sempre com os possíveis ganhos. (5)
-

11. A cada ano, o valor de sua carteira de investimentos varia em função das oscilações de mercado. Se você tivesse R\$50.000,00 para investir, qual dos fundos abaixo você escolheria?



- ☐ Fundo V. (7)
- ☐ Fundo IV. (5)
- ☐ Fundo III. (3)
- ☐ Fundo II. (2)
- ☐ Fundo I. (0)

12. Imaginemos que, você está procurando um novo emprego e lhe são oferecidas três diferentes propostas salariais para executar praticamente as mesmas funções. Qual você escolheria?

- ☐ Um bom salário fixo, cujo valor independe do seu desempenho. (0)
- ☐ Um salário fixo equivalente à metade do salário anterior, mais comissões atreladas ao seu desempenho, que podem atingir um valor equivalente a duas vezes o seu salário fixo mensal. (2)
- ☐ A sua remuneração depende exclusivamente do seu desempenho, sendo paga de forma variável. Em um mês de fraco desempenho seu salário será muito baixo, entretanto em um mês muito bom, pode chegar a 3 vezes o salário da proposta da primeira alternativa. (4)

13. Investimentos podem apresentar tanto rentabilidades positivas, quanto negativas. A partir de que rentabilidade negativa você começaria a se sentir desconfortável, pensando em retirar seu dinheiro?

- ☐ Qualquer variação negativa me deixa desconfortável. (0)
- ☐ 5%. (2)
- ☐ 10% (4)
- ☐ 20%. (7)
- ☐ 50%. (9)

14. Suponhamos que uma pessoa de sua confiança lhe apresente uma proposta para montar um novo negócio, que pode chegar a render dez vezes o investimento inicial se superar todos os riscos esperados. Quanto você estaria disposto a investir nesse novo negócio?

- ☐ Nada. (0)
- ☐ O seu rendimento de um mês. (4)
- ☐ Três meses dos seus rendimentos. (5)
- ☐ Seis meses dos seus rendimentos. (6)
- ☐ Um ano, ou mais, dos seus rendimentos. (8)

Fale-nos agora um pouco dos produtos financeiros que você conhece e está habituado a trabalhar.

15. Seguros podem lhe proteger de vários riscos a que você está sujeito normalmente. Quais dos seguros abaixo você possui, ou gostaria de possuir? Assinale quantas alternativas forem necessárias.*

- ☐ Carro. Nenhuma: (6)
- ☐ Vida. 1: (4)
- ☐ Saúde 2: (3)
- ☐ Casa. 3: (1)
- ☐ Outros. 4 ou 5: (0)

* A pontuação depende de quantas alternativas forem assinaladas

16. Existem pessoas que gostam de jogar cartas, ou assistir a corridas de cavalos, apostando dinheiro na esperança de ganhar bastante (ou algum) dinheiro. Qual a afirmativa que melhor descreve sua postura quanto a esse tipo de jogo de azar.

- ☐ Não gosto de fazer apostas envolvendo dinheiro. (0)
- ☐ Nunca participei desse tipo de jogo, mas tenho interesse. (3)
- ☐ Já apostei, mas não gostei da experiência. (1)
- ☐ Costumo apostar de vez em quando. (5)
- ☐ Costumo apostar frequentemente. Gosto da emoção e da possibilidade de ganhar dinheiro dessa maneira. (6)

17. Diferentes tipos de investimento estão sujeitos a flutuações tanto positivas quanto negativas nas suas rentabilidades. Para alguns existe inclusive o risco de não se receber de volta todo o capital investido. Você acredita saber quais são os fatores de risco responsáveis pelas oscilações nos preços dos seguintes ativos? Assinale quantas forem necessárias.*

- ☐ Caderneta de poupança.
- ☐ Imóveis.
- ☐ Fundos de investimento DI ou de renda fixa
- ☐ Ações.
- ☐ Fundos alavancados.

* a pontuação é igual ao número de alternativas assinaladas.

18. Você acredita que o ciclo econômico brasileiro está passando por um momento de:*

- ☐ Recessão.
- ☐ Estagnação.
- ☐ Crescimento.
- ☐ Não sei.

* não existe alternativa absolutamente correta. Depende da opinião de consenso do mercado na época em que esse questionário é respondido. Devem ser atribuídos três pontos para a resposta correta e zero para as demais.



BIBLIOGRÁFICAS

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARTELS, Robert. H.; BEATTY, John. C.; BARSKY, Brian. A. **An Introduction to Splines for Use in Computer Graphics and Geometric Modelling**. San Francisco, CA: Morgan Kaufmann, 1998.

BELLMAN, Richard. **Dynamic Programing**. 1ª ed. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1957.

BEYER, William. H.. **CRC Standard Mathematical Tables**, 28th ed. Boca Raton, FL : CRC Press, 1987.

BOULIER, Jean-François; DUPRÉ, Denis. **Gestão Financeira dos Fundos de Pensão**. 1ª ed. São Paulo : Pearson Education do Brasil, 2003.

BREALEY, Richard A.; MYERS, Stewart C.; MARCUS, Alan J. **Fundamentals of Corporate Finance**. 2ª ed. London : McGraw-Hill UK,1999.

CAMPBELL, John Y.; COCCO, João F.; GOMES, Francisco J.; MAENHOUT, Pascoal. “Investing Retirement Wealth? A Life-Cycle Model” Discussion Paper, **Harvard Institute of Economic Research**. Cambridge MA: Harvard University, 1999.

CAMPBELL, John Y.; COCCO, João F.; GOMES, Francisco J.; MAENHOUT, Pascoal; VICEIRA, Luis M. “Stock Market Mean Reversion and Optimal Equity Allocation of a Long-Lived Investor” **European Finance Review**, v.5 269-292, 2001.

CAMPBELL, John Y.; VICEIRA, Luis M. **Strategic Asset Allocation: Portfolio Choice for Long-Term Investors**. 1ªed. Oxford University Press, 2001.

COCCO, João F.; GOMES, Francisco J.; MAENHOUT, Pascoal. “Consumption and Portfolio Choice over the Life Cycle”. Working Paper: **Harvard University**, 2001.

COSTA NETO, Pedro Luiz O. **Estatística**. São Paulo: Edgard Blücher, 1977.

DAVIS, Paul .J.; RABINOWITZ, Paul H. **Methods of Numerical Integration**. 1ª ed. New York : Academic Press, 1975.

DEFUSCO, Richard A.; MCLEAVEY, Dennis W.; PINTO, Jerald E.; RUNKLE, David E. **Quantitative Methods for Investment Analysis**. 1ª ed. Baltimore, MD: United Book Press, 2001.

DRUCKER, Peter F. **Introdução à Administração**. 3ª ed. São Paulo : Pioneira, 1998.

FORTUNA, Eduardo. **Mercado Financeiro – Produtos e Serviços**. 12ª ed. Rio de Janeiro: Qualitymark, 1999.

GITMAN, Lawrence J. **Princípios de Administração Financeira**. 7ª ed. São Paulo: Harbra, 2002.

GOLLIER, Christian. **The Economics of Risk and Time**. 1ª ed. Cambridge, MA: MIT Press, 2001.

HAUGEN, Robert A. **Modern Investment Theory**. 4ª ed. New Jersey: Prentice Hall, 1997.

HARTIGAN, John A. **Clustering Algorithms**. 1ª ed. New York: Wiley, 1975.

HULL, John C. **Options, Futures, and Other Derivatives**. 3ª ed. New Jersey: Pretience Hall, 1997.

MARKOWITZ, Harry M. “Portfolio Selection”. **Journal of Finance**, v. 7 n. 1, 1952.

ROMAN, Steven. “The Hermite Polynomials”. **The Umbral Calculus**. New York: Academic Press. Art. 4.2.1, p.30-93, 1984.

SAAD, Nicolas S. **Modelos de Otimização para Gestão da Carteira de Ativos de um Fundo de Pensão**. 2000. 105p. Trabalho de Formatura – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo. São Paulo, 2000.

SHARPE, William F. “Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk”. **Journal of Finance**, v. 19. n. 3 p. 422-442, 1964.

SILVA, Luciano da C. **Alocação Ótima de Ativos e Derivativos em Fundos de Pensão Via Programação Estocástica**. 2001. 150p. Tese (Doutorado) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo. São Paulo, 2001.

TAUCHEN, George; HUSSEY, Robert. “Quadrature Based Methods for Obtaining Approximate Solutions to Nonlinear Asset Pricing Models”. **Econometrica**, 59, iss.2 371-396, 1991.

WINSTON, Wayne L., **Operations Research: Applications and Algorithms**. 2^a ed. Boston: PWS-Kent Publishing, 1991.

ZIENKIEWICZ, Olgierd C.; TAYLOR, Robert L. **The Finite Element Method: The Basics**. 4^a ed. Vol. 1. New York: McGraw-Hill, 1988.

pêndices



APÊNDICE I: TÁBUAS DE MORTALIDADE DO IBGE

BRASIL: Tábua Completa de Mortalidade - Ambos os sexos - 2001

Idades Exatas (X)	Probabilidades de Morte entre Duas Idades Exatas Q (X, N) (Por Mil)	Óbitos D (X, N)	l (X)	L (X, N)	T(X)	Expectativa de Vida à Idade X E(X)
0	32,670	3267	100000	96830	6887790	68,9
1	2,181	211	96733	96627	6790960	70,2
2	1,171	113	96522	96466	6694333	69,4
3	0,856	83	96409	96368	6597867	68,4
4	0,685	66	96326	96293	6501500	67,5
5	0,562	54	96260	96233	6405207	66,5
6	0,482	46	96206	96183	6308974	65,6
7	0,419	40	96160	96139	6212791	64,6
8	0,361	35	96119	96102	6116651	63,6
9	0,320	31	96084	96069	6020550	62,7
10	0,275	26	96054	96041	5924480	61,7
11	0,306	29	96027	96013	5828440	60,7
12	0,382	37	95998	95980	5732427	59,7
13	0,491	47	95961	95938	5636448	58,7
14	0,632	61	95914	95884	5540510	57,8
15	0,794	76	95854	95815	5444626	56,8
16	0,963	92	95777	95731	5348810	55,8
17	1,122	107	95685	95631	5253079	54,9
18	1,259	120	95578	95518	5157448	54,0
19	1,379	132	95457	95392	5061930	53,0
20	1,503	143	95326	95254	4966539	52,1
21	1,628	155	95183	95105	4871284	51,2
22	1,731	164	95028	94945	4776179	50,3
23	1,804	171	94863	94777	4681234	49,3
24	1,856	176	94692	94604	4586457	48,4
25	1,901	180	94516	94426	4491853	47,5
26	1,951	184	94337	94245	4397426	46,6
27	2,010	189	94152	94058	4303182	45,7
28	2,083	196	93963	93865	4209124	44,8
29	2,169	203	93767	93666	4115258	43,9
30	2,261	212	93564	93458	4021593	43,0
31	2,357	220	93353	93243	3928134	42,1
32	2,463	229	93133	93018	3834892	41,2
33	2,579	240	92903	92783	3741874	40,3
34	2,708	251	92664	92538	3649090	39,4
35	2,852	264	92413	92281	3556552	38,5
36	3,009	277	92149	92011	3464271	37,6
37	3,177	292	91872	91726	3372261	36,7
38	3,354	307	91580	91426	3280535	35,8
39	3,545	324	91273	91111	3189109	34,9

Notas:

N = 1

Q(X, N) = Probabilidades de morte entre as idades exatas X e X+N.

l(X) = Número de sobreviventes à idade exata X.

D(X, N) = Número de óbitos ocorridos entre as idades X e X+N.

L(X, N) = Número de pessoas-anos vividos entre as idades X e X+N.

T(X) = Número de pessoas-anos vividos a partir da idade X.

E(X) = Expectativa de vida à idade X.

BRASIL: Tábua Completa de Mortalidade - Ambos os sexos - 2001

(Conclusão)

Idades Exatas (X)	Probabilidades de Morte entre Duas Idades Exatas Q (X, N) (Por Mil)	Óbitos D (X, N)	l (X)	L (X, N)	T(X)	Expectativa de Vida à Idade X E(X)
40	3,751	341	90949	90779	3097998	34,1
41	3,983	361	90608	90428	3007219	33,2
42	4,254	384	90247	90055	2916791	32,3
43	4,570	411	89863	89658	2826736	31,5
44	4,928	441	89453	89232	2737078	30,6
45	5,321	474	89012	88775	2647846	29,7
46	5,740	508	88538	88284	2559071	28,9
47	6,177	544	88030	87758	2470787	28,1
48	6,629	580	87486	87196	2383029	27,2
49	7,103	617	86906	86598	2295833	26,4
50	7,611	657	86289	85961	2209235	25,6
51	8,166	699	85632	85283	2123274	24,8
52	8,776	745	84933	84560	2037992	24,0
53	9,449	796	84188	83790	1953431	23,2
54	10,186	849	83392	82967	1869642	22,4
55	10,985	907	82543	82089	1786674	21,6
56	11,843	967	81636	81152	1704585	20,9
57	12,757	1029	80669	80154	1623433	20,1
58	13,729	1093	79640	79093	1543278	19,4
59	14,770	1160	78547	77966	1464185	18,6
60	15,911	1231	77386	76771	1386218	17,9
61	17,161	1307	76155	75502	1309448	17,2
62	18,509	1385	74848	74156	1233946	16,5
63	19,961	1466	73463	72730	1159790	15,8
64	21,545	1551	71997	71221	1087061	15,1
65	23,233	1637	70445	69627	1015840	14,4
66	25,117	1728	68809	67945	946213	13,8
67	27,367	1836	67080	66163	878268	13,1
68	30,090	1963	65245	64263	812106	12,4
69	33,260	2105	63281	62229	747843	11,8
70	36,721	2246	61177	60053	685613	11,2
71	40,442	2383	58930	57739	625560	10,6
72	44,590	2521	56547	55286	567821	10,0
73	49,231	2660	54025	52696	512535	9,5
74	54,384	2793	51366	49969	459840	9,0
75	60,065	2917	48572	47114	409871	8,4
76	66,267	3025	45655	44142	362757	7,9
77	73,008	3112	42629	41073	318615	7,5
78	80,306	3173	39517	37930	277542	7,0
79	88,257	3208	36344	34739	239611	6,6
80	1,000	33135	33135	204872	204872	5,8

Fonte: IBGE, Diretoria de Pesquisas (DPE), Departamento de População e Indicadores Sociais (DEPIS).

APÊNDICE II: A VOLATILIDADE HISTÓRICA DO ÍNDICE IBOVESPA

Na **Tabela II.1**, temos a série dos retornos reais históricos do índice Bovespa. Os retornos reais são dados pela divisão do retorno nominal pela variação da inflação. Por sua vez, o retorno nominal r_n de um instante t a um instante $t + 1$ é dado pela seguinte equação:

$$r_n = \frac{Ibovespa_{t+1}}{Ibovespa_t} - 1 \quad (\text{II.1})$$

Os retornos nominais foram calculados com base em uma série de preços mensais do Ibovespa, deste o início do plano real (julho de 1994) até agosto de 2003. O índice de preços utilizado para a medição da variação da inflação foi o IGP-DI, que é calculado pela Fundação Getúlio Vargas e apresenta a vantagem de ser fixado em janelas de trinta dias iguais ao mês calendário (compreende variações nos preços entre o dia 30 de um mês e o dia 30 do mês seguinte). A fonte de ambos os dados é o sistema Bloomberg.

A volatilidade da bolsa é dada pelo desvio padrão da amostra selecionada, entretanto, como os retornos estão em base mensal, a volatilidade também está. Para converter este número para uma base anual, basta multiplicá-lo por $\sqrt{12}$.

Uma última observação, o parâmetro σ_η , que é a volatilidade do choque ao prêmio de mercado μ é exatamente igual à volatilidade dos retornos reais da bolsa, uma vez que o primeiro é dado pelo retorno da bolsa a menos das constantes μ e r_f (retorno do ativo livre de risco). Dessa forma:

$$\sigma_\eta = 9,46\% \text{ ao mês, ou}$$

$$\sigma_\eta = 32,78\% \text{ ao ano.}$$

Na resolução do modelo, aproximamos este valor para 35% ao ano.

Apêndice II – A volatilidade histórica do índice Ibovespa

Mês	Ibovespa (pontos)	Retorno nominal Ibovespa	Inflação no mês (IGP-DI)	Retorno real Ibovespa
jul-94	3.968	27,55%	24,71%	2,28%
ago-94	4.842	22,02%	3,34%	18,08%
set-94	5.317	9,80%	1,55%	8,12%
out-94	4.832	-9,11%	2,55%	-11,37%
nov-94	4.694	-2,85%	2,47%	-5,20%
dez-94	4.600	-2,02%	0,57%	-2,57%
jan-95	3.875	-15,75%	1,36%	-16,88%
fev-95	3.340	-13,81%	1,15%	-14,79%
mar-95	2.942	-11,93%	1,81%	-13,50%
abr-95	3.325	13,03%	2,30%	10,49%
mai-95	3.952	18,87%	0,40%	18,40%
jun-95	3.724	-5,79%	2,62%	-8,19%
jul-95	3.884	4,30%	2,24%	2,02%
ago-95	4.255	9,56%	1,29%	8,16%
set-95	4.654	9,37%	-1,08%	10,56%
out-95	4.439	-4,61%	0,23%	-4,83%
nov-95	4.071	-8,29%	1,33%	-9,49%
dez-95	4.272	4,93%	0,27%	4,65%
jan-96	4.826	12,96%	1,79%	10,97%
fev-96	5.272	9,24%	0,76%	8,42%
mar-96	4.930	-6,48%	0,22%	-6,69%
abr-96	5.017	1,77%	0,70%	1,07%
mai-96	5.483	9,28%	1,68%	7,48%
jun-96	5.787	5,54%	1,22%	4,27%
jul-96	6.272	8,40%	1,09%	7,23%
ago-96	6.250	-0,36%	0,00%	-0,36%
set-96	6.435	2,96%	0,13%	2,83%
out-96	6.627	2,99%	0,22%	2,77%
nov-96	6.612	-0,23%	0,28%	-0,51%
dez-96	6.842	3,48%	0,88%	2,58%
jan-97	7.602	11,11%	1,58%	9,38%
fev-97	8.643	13,69%	0,42%	13,21%
mar-97	9.241	6,93%	1,16%	5,70%
abr-97	9.597	3,84%	0,59%	3,23%
mai-97	10.599	10,44%	0,30%	10,11%
jun-97	11.934	12,60%	0,70%	11,82%
jul-97	12.712	6,52%	0,09%	6,42%
ago-97	11.638	-8,45%	-0,04%	-8,42%
set-97	11.396	-2,08%	0,59%	-2,65%
out-97	11.899	4,41%	0,34%	4,06%
nov-97	9.169	-22,94%	0,83%	-23,58%
dez-97	9.711	5,92%	0,69%	5,19%
jan-98	9.659	-0,54%	0,88%	-1,41%
fev-98	10.271	6,34%	0,02%	6,32%
mar-98	11.526	12,22%	0,23%	11,96%
abr-98	11.824	2,58%	-0,13%	2,72%
mai-98	10.569	-10,62%	0,23%	-10,82%
jun-98	9.794	-7,33%	0,28%	-7,59%
jul-98	10.531	7,52%	-0,38%	7,94%
ago-98	8.429	-19,96%	-0,17%	-19,83%
set-98	6.389	-24,20%	-0,02%	-24,18%
out-98	6.697	4,81%	-0,03%	4,85%
nov-98	8.256	23,29%	-0,18%	23,51%
dez-98	7.283	-11,79%	0,98%	-12,65%
jan-99	7.002	-3,86%	1,15%	-4,95%
fev-99	8.838	26,23%	4,44%	20,86%
mar-99	10.171	15,08%	1,98%	12,84%
abr-99	11.194	10,06%	0,03%	10,03%
mai-99	11.730	4,79%	-0,34%	5,15%
jun-99	11.360	-3,16%	1,02%	-4,14%
jul-99	11.260	-0,87%	1,59%	-2,43%
ago-99	10.182	-9,58%	1,45%	-10,87%
set-99	11.313	11,12%	1,47%	9,51%
out-99	11.310	-0,03%	1,89%	-1,89%
nov-99	13.121	16,01%	2,53%	13,15%
dez-99	15.086	14,98%	1,23%	13,58%
jan-00	16.926	12,20%	1,02%	11,07%
fev-00	17.804	5,18%	0,19%	4,99%
mar-00	18.055	1,41%	0,18%	1,23%
abr-00	15.910	-11,88%	0,13%	-12,00%
mai-00	14.694	-7,64%	0,67%	-8,26%
jun-00	16.458	12,00%	0,93%	10,97%
jul-00	17.087	3,82%	2,26%	1,53%
ago-00	17.170	0,49%	1,82%	-1,31%
set-00	16.659	-2,98%	0,69%	-3,64%
out-00	15.044	-9,69%	0,37%	-10,03%
nov-00	14.407	-4,24%	0,39%	-4,61%
dez-00	14.715	2,14%	0,76%	1,37%
jan-01	17.120	16,35%	0,49%	15,78%
fev-01	16.597	-3,06%	0,34%	-3,39%
mar-01	15.330	-7,63%	0,80%	-8,37%
abr-01	14.432	-5,85%	1,13%	-6,91%
mai-01	14.689	1,78%	0,44%	1,33%
jun-01	14.866	1,21%	1,46%	-0,25%
jul-01	13.946	-6,19%	1,62%	-7,69%
ago-01	13.413	-3,82%	0,90%	-4,68%
set-01	11.012	-17,90%	0,38%	-18,21%
out-01	10.964	-0,44%	1,45%	-1,86%
nov-01	12.799	16,73%	0,76%	15,85%
dez-01	13.319	4,07%	0,18%	3,88%
jan-02	13.401	0,62%	0,19%	0,43%
fev-02	13.227	-1,30%	0,18%	-1,48%
mar-02	13.902	5,10%	0,11%	4,99%
abr-02	13.344	-4,01%	0,70%	-4,68%
mai-02	12.515	-6,21%	1,11%	-7,24%
jun-02	11.686	-6,63%	1,74%	-8,23%
jul-02	10.306	-11,81%	2,05%	-13,58%
ago-02	9.791	-4,99%	2,36%	-7,18%
set-02	9.644	-1,51%	2,64%	-4,04%
out-02	9.180	-4,81%	4,21%	-8,66%
nov-02	10.030	9,26%	5,84%	3,23%
dez-02	10.841	8,08%	2,70%	5,24%
jan-03	11.486	5,96%	2,17%	3,71%
fev-03	10.350	-9,89%	1,59%	-11,30%
mar-03	10.918	5,48%	1,66%	3,76%
abr-03	12.086	10,71%	0,41%	10,25%
mai-03	13.091	8,32%	-0,67%	9,05%
jun-03	13.491	3,05%	-0,70%	3,78%
jul-03	13.550	0,44%	-0,20%	0,64%
ago-03	14.008	3,39%	0,62%	2,75%

Tabela II.1 – Série história dos retornos reais mensais do Ibovespa desde o plano real.

APÊNDICE III: MÉTODO DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA POR QUADRATURA DE GAUSS E GAUSS-HERMITE.

Técnicas de integração numérica são bastante úteis quando, por exemplo, a determinação das funções primitivas não é tão trivial ou mesmo analiticamente inexistente. Neste apêndice descreveremos um método bastante útil para se obter uma aproximação para alguns determinados tipos de integral, que é o método da quadratura de Gauss¹.

Seja N o número de pontos de amostragem e $g(u)$ uma função qualquer com $u \in R^1$ para a qual se pretende calcular a integral no intervalo $[a, b]$ contra uma densidade $w(u)$. Pelo método da quadratura de Gauss, temos que:

$$\int_a^b g(u)w(u)du \cong \sum_{k=0}^{N-1} g(u_k)w_k \quad (\text{III.1})$$

onde os pontos u_k são os pontos de Gauss ou pontos de amostragem e w_k representam os chamados pesos destes pontos. À medida que $N \rightarrow \infty$, o valor da somatória converge para o valor da integral. Os pontos u_k e seus respectivos pesos w_k dependem única e exclusivamente da função de densidade w e dos limites a e b , o que possibilita suas padronizações e disponibilização em forma tabelada.

A seguir, apresentaremos como que estes valores podem ser obtidos no caso em que $w(u)=1$, $a=-1$ e $b=1$ para $N=3$, pelo método padrão de Gauss, que é feita forçando-se a igualdade da expressão (III.1) para todos os polinômios de grau menores ou iguais a $2N-1$.

Assim sendo, para

¹ Neste apêndice, focalizaremos no método de integração para funções cujas variáveis pertencem a R^1 , entretanto, este método pode ser utilizado da mesma forma para integrais em R^n .

$$g(u) = c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + c_3 u^3 + c_4 u^4 + c_5 u^5 \quad (\text{III.2})$$

o valor exato I da integral $\int_{-1}^1 g(u) du$ é o seguinte:

$$I = 2c_0 + \frac{2}{3}c_2 + \frac{2}{5}c_4 = 2c_0 + 0c_1 + \frac{2}{3}c_2 + 0c_3 + \frac{2}{5}c_4 + 0c_5 \quad (\text{III.3})$$

Por outro lado, deseja-se determinar o valor desta integral através da somatória dos valores da função $g(u)$ calculada em $N = 3$ pontos de Gauss, portanto,

$$J = \sum_{k=0}^2 g(u_k) w_k = w_0 g(u_0) + w_1 g(u_1) + w_2 g(u_2) \quad (\text{III.4})$$

que para a função g definida segundo a equação (III.2), temos:

$$\begin{aligned} J = & w_0 (c_0 + c_1 u_0 + c_2 u_0^2 + c_3 u_0^3 + c_4 u_0^4 + c_5 u_0^5) + \\ & + w_1 (c_0 + c_1 u_1 + c_2 u_1^2 + c_3 u_1^3 + c_4 u_1^4 + c_5 u_1^5) + \\ & + w_2 (c_0 + c_1 u_2 + c_2 u_2^2 + c_3 u_2^3 + c_4 u_2^4 + c_5 u_2^5) \end{aligned} \quad (\text{III.5})$$

E isolando em função dos coeficientes do polinômio genérico do quinto grau,

$$\begin{aligned} J = & (w_0 + w_1 + w_2) c_0 + \\ & + (w_0 u_0 + w_1 u_1 + w_2 u_2) c_1 + \\ & + (w_0 u_0^2 + w_1 u_1^2 + w_2 u_2^2) c_2 + \\ & + (w_0 u_0^3 + w_1 u_1^3 + w_2 u_2^3) c_3 + \\ & + (w_0 u_0^4 + w_1 u_1^4 + w_2 u_2^4) c_4 + \\ & + (w_0 u_0^5 + w_1 u_1^5 + w_2 u_2^5) c_5 \end{aligned} \quad (\text{III.6})$$

Fazendo-se agora $I = J$, e dado que os coeficientes c_i são arbitrários, para que a igualdade se verifique é suficiente que

$$\begin{cases} w_0 + w_1 + w_2 &= 2 \\ w_0 u_0 + w_1 u_1 + w_2 u_2 &= 0 \\ w_0 u_0^2 + w_1 u_1^2 + w_2 u_2^2 &= 2/3 \\ w_0 u_0^3 + w_1 u_1^3 + w_2 u_2^3 &= 0 \\ w_0 u_0^4 + w_1 u_1^4 + w_2 u_2^4 &= 2/5 \\ w_0 u_0^5 + w_1 u_1^5 + w_2 u_2^5 &= 0 \end{cases} \quad (\text{III.7})$$

Para obtermos os valores de u_0 , u_1 , u_2 , w_0 , w_1 e w_2 , basta resolver o sistema de seis equações não lineares a seis incógnitas (III.7). A solução encontrada é a seguinte:

$$\begin{cases} u_1 = & -0,7745966692 \\ u_2 = & 0 \\ u_3 = & 0,7745966692 \\ w_1 = & 0,5555555556 \\ w_2 = & 0,8888888889 \\ w_3 = & 0,5555555556 \end{cases} \quad (\text{III.8})$$

Dessa forma, o valor exato da integral de um polinômio g de grau 5, no intervalo de $[-1,1]$, pode ser obtido com:

$$J = 0,5556g(-0,7745966692) + 0,8889g(0) + 0,5556g(0,7745966693) \quad (\text{III.9})$$

No caso de uma função genérica $g(u)$ qualquer, seja ele polinomial ou não, a expressão (III.9) fornece um valor aproximado da integral $\int_{-1}^1 g(u) du$ pelo método de Gauss.

Analogamente, poderia ser utilizado um número maior de pontos de Gauss, o que aumentaria a precisão da aproximação. Com base nisso, foram sendo elaboradas tabelas padronizadas com os valores de u_k e w_k para diferentes números de Gauss e tipos de função densidade.

Para a determinação da expectativa de melhor decisão de alocação futura $E_t(f_{t+1}(W_{t+1}))$ conforme apresentado no Capítulo 5, utilizaremos os dados presentes na tabela de Gauss-Hermite. Esta tabela é baseada na função densidade $w(u) = e^{-u^2}$ com os limites de integração a e b iguais a $-\infty$ e $+\infty$ respectivamente. A diferença entre o método de Gauss introduzido logo acima e o método de Gauss-Hermite, é a utilização de polinômios de Hermite¹ ao invés de polinômios simples de grau $2N - 1$ na fixação dos parâmetros u_k e w_k .

Entretanto, devem ser feitas algumas transformações na equação do modelo desenvolvido neste trabalho para que esta possa ser escrita na forma padrão exigida pelo método Gauss-Hermite apresentada abaixo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(u) e^{-u^2} du \quad (\text{III.10})$$

Segundo o modelo de otimização desenvolvido, a expectativa de melhor decisão futura $E_t(f_{t+1}(W_{t+1}))$ é dada pela seguinte integral:

$$E_t(f_{t+1}(W_{t+1})) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{t+1}(W_{t+1}(\eta_t)) P(\eta_t) d\eta_t \quad (\text{III.11})$$

Onde:

W_{t+1} representa a riqueza financeira do indivíduo acumulada no início do ano $t+1$, conforme definido no modelo de alocação proposto no Capítulo 3. Esta, por sua vez, é função da variável aleatória η_t . Não confundir na notação com os parâmetros w_k do método de integração.

$P(\eta_t)$ é a função de densidade de probabilidade normal que rege o comportamento da variável aleatória η_t segundo $N(0, \sigma_\eta^2)$. Esta função é dada pela seguinte equação:

¹ Para maiores informações acerca dos polinômios de Hermite, consultar Roman (1984).

$$P(\eta_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta} e^{\left(-\frac{\eta_t^2}{2\sigma_\eta^2}\right)} \quad (\text{III.12})$$

Combinando-se as equações (III.11) e (III.12) , temos:

$$E_t(f_{t+1}(W_{t+1})) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{t+1}(W_{t+1}(\eta_t)) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta} e^{\left(-\frac{\eta_t^2}{2\sigma_\eta^2}\right)} d\eta_t \quad (\text{III.13})$$

que pode ser escrita também na forma:

$$E_t(f_{t+1}(W_{t+1})) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{t+1}(W_{t+1}(\eta_t)) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta} e^{\left(\frac{(2\sigma_\eta^2-1)\eta_t^2}{2\sigma_\eta^2}\right)} e^{(-\eta_t^2)} d\eta_t \quad (\text{III.14})$$

Fazendo um paralelo com a expressão genérica (III.10), chegamos à seguinte aproximação para a expectativa de melhor decisão em $t+1$:

$$E_t(f_{t+1}(W_{t+1})) \cong \sum_{k=0}^{N-1} g(\eta_{t,k}) w_k \quad (\text{III.15})$$

$$\text{com } g(\eta_{t,k}) = f_{t+1}(W_{t+1}(\eta_{t,k})) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta} e^{\left(\frac{(2\sigma_\eta^2-1)\eta_{t,k}^2}{2\sigma_\eta^2}\right)} \quad (\text{III.16})$$

Onde

$\eta_{t,k}$ são os valores de Gauss padronizados, que as variáveis aleatórias η_t podem assumir para $k \in \{0,1,...,N-1\}$;

w_k são os pesos padrões associados a cada valor assumido para $\eta_{t,k}$, com $k = \{0,1,...,N-1\}$

Para facilitar a notação, definamos A_k como sendo os pesos de Gauss adaptados:

$$A_k = w_k \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta} e^{\left(\frac{(2\sigma_\eta^2-1)\eta_{t,k}^2}{2\sigma_\eta^2}\right)} \quad (\text{III.17})$$

Dessa forma, chegamos a:

$$E_t(f_{t+1}(W_{t+1})) \cong \sum_{k=0}^{N-1} A_k f_{t+1}(W_{t+1}(\eta_{t,k})) \quad (\text{III.18})$$

Cocco; Gomes; Maenhout (1998) utilizam um número de pontos de Gauss igual a 5 na resolução do problema de otimização proposto por eles. Neste trabalho optamos por 7 pontos, pois dessa forma obtemos uma aproximação com uma precisão um pouco maior. Testamos o modelo para valores superiores a esse, entretanto não obtivemos alterações significativas tanto nos valores da solução ótima quanto na sensibilidade do modelo aos demais parâmetros.

Dessa forma, com base na tabela para os valores e pesos de Gauss-Hermite¹, e uma volatilidade de $\sigma_\eta = 35\%$, chegamos aos seguintes valores para $N = 7$.

k	$\eta_{t,k}$	w_k	A_k
0	-2,65196E+00	9,71781E-04	4,28576E-13
1	-1,67355E+00	5,45156E-02	1,10914E-05
2	-8,16288E-01	4,25607E-01	6,22419E-02
3	0	8,10265E-01	9,23568E-01
4	8,16288E-01	4,25607E-01	6,22419E-02
5	1,67355E+00	5,45156E-02	1,10914E-05
6	2,65196E+00	9,71781E-04	4,28576E-13

Tabela III.1 – Valores de $\eta_{t,k}$ e A_k , para $N = 7$

¹ Esta tabela, limitada a $N = 12$, pode ser encontrada à página 464 de Beyer (1987), que é uma publicação que contém apenas tabelas padronizadas e fórmulas matemáticas dos mais diversos tipos.

APÊNDICE IV: MÉTODO DE INTERPOLAÇÃO POR *SPLINE* CÚBICO

No método de solução numérica do modelo de otimização apresentado no Capítulo 5 foi utilizada a técnica de interpolação por *spline* cúbica. A vantagem de se utilizar esse método em detrimento de outros mais simples, como por exemplo, a interpolação linear ou a exponencial, é que a interpolação por *spline* cúbica parte de uma função contínua e diferenciável até a segunda ordem em todos os pontos pertencentes ao intervalo de dados analisados. Este método é um dos mais utilizados em algoritmos numéricos em geral. Exemplos de resultados obtidos com a interpolação por *spline* cúbica podem ser vistos na **Figura IV.1**.

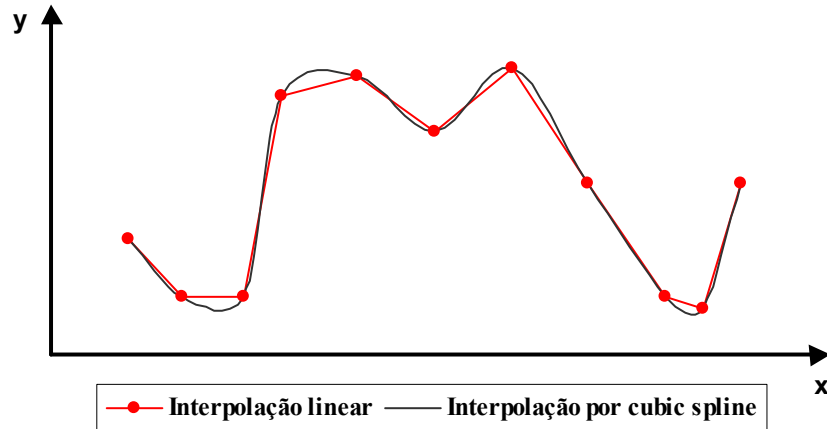


Figura IV.1 – Exemplo de Interpolação por *spline* cúbico, em comparação com o método linear.

Segundo Bartels et al.(1998), a definição da função *spline* cúbica é a seguinte: dado um conjunto de $N+1$ pontos $\{(x_j, y_j)\}_{j=0}^N$, chamados de nós, tal que:

$$x_0 < x_1 < \dots < x_j < x_{j+1} < \dots < x_N \quad (\text{IV.1})$$

e dado N polinômios $S_j(x)$ do terceiro grau, com coeficientes reais a_j , b_j , c_j e d_j na forma:

$$S_j(x) = a_j + b_j \left(\frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} \right) + c_j \left(\frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} \right)^2 + d_j \left(\frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} \right)^3 \quad (\text{IV.2})$$

atendendo às seguintes condições:

$$1. S_j(x_{j+1}) = S_{j+1}(x_{j+1}) = y_{j+1} \text{ para todo } j = \{0, 1, \dots, N-2\} \quad (\text{IV.3})$$

$$2. S'_j(x_{j+1}) = S'_{j+1}(x_{j+1}) \text{ para } j = \{0, 1, \dots, N-2\} \quad (\text{IV.4})$$

$$3. S''_j(x_{j+1}) = S''_{j+1}(x_{j+1}) \text{ para } j = \{0, 1, \dots, N-2\} \quad (\text{IV.5})$$

define-se a função $cubic(x)$ como a interpolação pelo método *spline* cúbico dos nós $\{(x_j, y_j)\}_{j=0}^N$ da seguinte forma:

$$cubic(x) = \begin{cases} S_0(x) & \text{para } x_0 \leq x < x_1 \\ S_1(x) & \text{para } x_1 \leq x < x_2 \\ \dots & \dots \\ S_{N-1}(x) & \text{para } x_{N-1} \leq x < x_N \\ x_N & \text{para } x = x_N \end{cases} \quad (\text{IV.6})$$

Para que possamos obter os valores de $cubic$, devemos antes determinar os valores de a_j , b_j , c_j e d_j para todo $j = \{0, 1, \dots, N-1\}$, o que é feito baseado nas três condições apresentadas acima.

Calculando-se S_j em $x = x_j$ e $x = x_{j+1}$ através da equação (IV.2), e com base na igualdade (IV.3) temos que:

$$S_j(x_j) = a_j = y_j \text{ para todo } j = \{0, 1, \dots, N-1\} \quad (\text{IV.7})$$

$$S_j(x_{j+1}) = a_j + b_j + c_j + d_j = y_{j+1} \text{ para todo } j = \{0, 1, \dots, N-1\} \quad (\text{IV.8})$$

Da mesma maneira, calculando os valores da primeira derivada S'_j em $x = x_j$ e $x = x_{j+1}$ podemos definir os parâmetros D_j para todo $j = \{0, 1, \dots, N-1\}$ da seguinte maneira:

$$S'_j(x_j) = D_j = b_j \quad \text{para todo } j = \{0, 1, \dots, N-1\} \quad (\text{IV.9})$$

$$S'_j(x_{j+1}) = D_{j+1} = b_j + 2c_j + 3d_j \quad \text{para todo } j = \{0, 1, \dots, N-1\} \quad (\text{IV.10})$$

Resolvendo-se o sistema linear das quatro equações (IV.7) a (IV.10) a quatro incógnitas, temos:

$$a_j = y_j \quad (\text{IV.11})$$

$$b_j = D_j \quad (\text{IV.12})$$

$$c_j = 3(y_{j+1} - y_j) - 2D_j - D_{j+1} \quad (\text{IV.13})$$

$$d_j = 2(y_j - y_{j+1}) + D_j + D_{j+1} \quad (\text{IV.14})$$

Perceba que, o que antes eram quatro parâmetros para cada $j = \{0, 1, \dots, N-1\}$ foi escrito em função de apenas este novo parâmetro D_j , com $j = \{0, 1, \dots, N-1\}$.

Bartels *et al.*(1998) demonstram que os valores de D_j podem ser obtidos através da resolução do seguinte sistema linear, escrito na forma $Ax = B$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_0 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ \dots \\ D_{N-1} \\ D_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(y_1 - y_N) \\ 3(y_2 - y_0) \\ 3(y_3 - y_1) \\ \dots \\ 3(y_{N-1} - y_{N-3}) \\ 3(y_N - y_{N-2}) \\ 3(y_0 - y_{N-1}) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.15})$$

A matriz quadrada (A) da equação acima, a menos dos dois valores iguais a 1 nas posições a_{1N} e a_{N1} , é uma matriz tridiagonal¹, com os valores da diagonal principal igual a 4 e das sub-diagonal e super-diagonal iguais a 1.

Resolvendo-se o sistema linear apresentado e de posse dos valores D_j , podemos determinar os parâmetros a_j , b_j , c_j e d_j para todo $j = \{0, 1, \dots, N-1\}$ e, uma vez conhecidos esses parâmetros, a interpolação de qualquer valor de $x \in [x_0, x_N]$ pelo método *cubic spline* é dado pela equação (IV.6).

Na programação deste método de interpolação na linguagem *Perl*, optamos por dividi-lo em duas sub-funções separadas do programa principal. Foram criadas as rotinas chamadas de *derivada* e *cubic*, que podem ser vistas logo no início da listagem apresentada no Apêndice V. A primeira recebe dois vetores com os pontos $\{(x_j, y_j)\}_{j=0}^N$ e retorna o vetor de pontos D_j . Já a segunda é alimentada com os vetores dos pontos $\{(x_j, y_j)\}_{j=0}^N$, D_j e o escalar que representa o valor de x , retornando sua interpolação segundo o método apresentado.

¹ Uma matriz tridiagonal é uma matriz quadrada, cujos únicos elementos diferentes de zero se situam em sua diagonal principal e nas posições imediatamente adjacentes a ela (ou seja, também em sua sub-diagonal e super-diagonal)

APÊNDICE V: LISTAGEM DO ALGORITMO DE SOLUÇÃO IMPLEMENTADO EM *PERL*

```
# -----INICIALIZACAO DO PROGRAMA-----
use warnings;
use strict;

#-----FUNCAO DE LEITURA-----

#Esta sub-rotina realiza a leitura dos dados de arquivo de entrada
#interpretando corretamente tanto virgulas quanto pontos como
#separador de decimais
sub leitura
{
    $_ = <>;
    chomp;
    s/\\,\\. /g;
    return $_;
}

#-----FUNCAO DERIVADA-----

#Essa sub-rotina faz parte da funcao de interpolacao spline
#cubico, retornando o vetor D, conforme apresentado no apendice IV

sub derivada
{
    my $xin = shift;
    my $yin = shift;
    my $N = (scalar @$xin) - 1;
    my @yt = (0);
    my @U = (0);
    foreach (1..($N-1))
    {
        my $sig = ($$xin[$_] - $$xin[$_-1]) / ($$xin[$_+1] - $$xin[$_-1]);
        my $P = $sig * $yt[$_-1] + 2;
        $yt[$_] = ($sig - 1) / $P;
        $U[$_] = ($$yin[$_+1] - $$yin[$_] ) / ($$xin[$_+1] - $$xin[$_] ) -
        ($$yin[$_] - $$yin[$_-1]) / ($$xin[$_] - $$xin[$_-1]);
        $U[$_] = (6 * $U[$_] / ($$xin[$_+1] - $$xin[$_-1]) - $sig *
        $U[$_-1]) / $P;
    }
    $yt[$N] = 0;
    foreach (reverse (0..($N-1)))
    {
        $yt[$_] = $yt[$_] * $yt[$_+1] + $U[$_];
    }
    return \@yt;
}

#-----FUNCAO CUBIC-----

#Essa sub-rotina retorna a interpolacao por spline cubico

sub cubic
{
    my $xin = shift;
```

```

        my $yin = shift;
        my $yt = shift;
        my $X = shift;
# print "xin: @$xin \n";
# print "yin: @$yin \n";
# print "yt: @$yt \n";
        my $N = (scalar @$xin) - 1;
        my $klo = 0;
        my $khi = $N;
        my $k;
        do
        {
            $k = int (($khi + $klo) * 0.5);
            if ( $X < $$xin[$k] )
            {
                $khi = $k;
            }
            else
            {
                $klo = $k;
            }
        } while ( $khi - $klo > 1 );
        my $h = $$xin[$khi] - $$xin[$klo];
        my $a = ($$xin[$khi] - $X) / $h;
        my $b = ($X - $$xin[$klo]) / $h;
        my $y;

        $y = $a * $$yin[$klo] + $b * $$yin[$khi] + (($a**3 - $a) *
        $$yt[$klo] + ($b**3 - $b) * $$yt[$khi]) * ($h**2) / 6;
        return $y;
    }

#-----PROGRAMA PRINCIPAL-----
#-----LEITURA DADOS DE ENTRADA-----

my $rf = leitura;
print "rf= $rf \n";
my $gama = leitura;
print "gama= $gama \n";
my $umgama = 1 - $gama;
my $delta = leitura;
print "delta= $delta \n";
my $vida = leitura;
print "vida_máxima= $vida \n";
my $idade = leitura;
print "idade_atual= $idade \n";
my $Xzero = leitura;
print "riqueza_inicial= $Xzero \n";
my $Cgrid = leitura;
print "Cgrid= $Cgrid \n";
my $Cmin = leitura;
print "Cmin= $Cmin \n";
my $Salmin = leitura;
print "Fi_salario_minimo= $Salmin \n";

leitura;
my @cenario = split;
print "Cenário: @cenario \n";
my $tam_cenario = @cenario - 1;
leitura;

```

```
my @rv = split;
print "Retorno: @rv \n";

my %prob;
my %salario;
my %prob_emprego;
my %C_subsis;
while ( leitura )
{ my ($anos, $pr, $sal, $pr_emp, $subs) = split;
  $prob{$anos} = $pr;
  $salario{$anos} = $sal;
  $prob_emprego{$anos} = $pr_emp;
  $C_subsis{$anos} = $subs;
}
foreach (sort keys %prob)
{ print "Prob($_) = $prob{$_}      Salario= $salario{$_}
  Prob_Emprego= $prob_emprego{$_}      Consumo_Subsistencia=
  $C_subsis{$_}\n";
}

# a variavel xgrid representa os possiveis valores iniciais
# em cada estado da recursao
my %Xgrid;
while ( leitura )
{ my ($id, @i) = split;
  $Xgrid{$id} = \@i;
}
foreach (sort keys %Xgrid)
{ print "$_ ";
  my $ref = $Xgrid{$_};
  foreach (@$ref)
  { print "$_ ";
  }
  print "\n";
}

leitura;
my @alfagrid = split;
print "Alfagrid = @alfagrid \n";

#---CALCULO DA UTILIDADE MAXIMA NO ULTIMO ESTADO-----
my %Utilidade;
my $ref = $Xgrid{$vida};
my @vet;
$Utilidade{$vida} = \@vet;
my $vetor = $Utilidade{$vida};
foreach (@$ref)
{ my $valor = (($_ / $C_subsis{$vida}) ** $umgama - 1) / $umgama;
  push @$vetor, $valor;
}
print "vetor= @$vetor \n";

my %Cubic_aux;
my $yt_ref = derivada $ref, $vetor;
$Cubic_aux{$vida} = $yt_ref;

my %Cotimo;
```

```

my %AlfaOtimo;

#-----LOOP DE RESOLUCAO DAS RECURSOES ATE UM ESTADO ANTEIROR AO
#INICIAL-----

my $xin;
my $yin;
my $yt;
my $max;
my $consumo;
my $alfa_max;
my $alfa;
my $ano;
foreach $ano (reverse (($idade+1)..($vida-1)))
{ my $cel_ref = $Xgrid{$ano};
print "Ano:$ano \n";
    $xin = $Xgrid{$ano+1};
    $yin = $Utilidade{$ano+1};
    $yt = $Cubic_aux{$ano+1};
    my @Utilidade;
    $Utilidade{$ano} = \@Utilidade;
    my @Cotimo;
    $Cotimo{$ano} = \@Cotimo;
    my @AlfaOtimo;
    $AlfaOtimo{$ano} = \@AlfaOtimo;
    my $X;
    foreach $X (@$cel_ref)
    { $max = -10000000000;
      foreach $alfa (@alfagrid)
      { my $i;
        my $dif = $X - $Cmin + $Salmin * $salario{$ano};
        my $C;
        foreach $i (0..($Cgrid-1))
        { $C = $Cmin + $i * $dif / ($Cgrid - 1);
          my $Fit = (($C / $C_substist{$ano}) ** $umgama - 1) /
$umgama;
          my $valor = 0;
          my $dif_2 = $X + $salario{$ano} - $C;
          foreach (0..$tam_cenario)
          { my $aux = $dif_2 * ($alfa * $rv[$_] + (1 - $alfa) *
$rf);
            $valor += $cenario[$_] * cubic $xin, $yin, $yt, $aux;
          }
          $Fit += $prob_emplo{$ano} * $valor * $delta *
$prob{$ano+1};
          $valor = 0;
          $dif_2 = $X + $Salmin * $salario{$ano} - $C;
          foreach (0..$tam_cenario)
          { my $aux = $dif_2 * ($alfa * $rv[$_] + (1 - $alfa) *
$rf);
            $valor += $cenario[$_] * cubic $xin, $yin, $yt, $aux;
          }
          $Fit += (1 - $prob_emplo{$ano}) * $valor * $delta *
$prob{$ano+1};
          if ( $Fit > $max )
          { $max = $Fit;
            $consumo = $C;
            $alfa_max = $alfa;

```

```

        }
    }
    push @Utilidade, $max;
    push @Cotimo, $consumo;
    push @AlfaOtimo, $alfa_max;
}

#impressao das solucoes otimas em cada valor de riqueza inicial,
#para todos os estados

print "XGrid:      ";
my $temp = $Xgrid{$ano};
foreach (@$temp)
{ print "$_ ";
}
print "\nUtilidade: ";
$temp = $Utilidade{$ano};
foreach (@$temp)
{ print "$_ ";
}
print "\nAlfa:      ";
$temp = $AlfaOtimo{$ano};
foreach (@$temp)
{ print "$_ ";
}
print "\nCotimo:    ";
$temp = $Cotimo{$ano};
foreach (@$temp)
{ print "$_ ";
}
print "\n";

$yt_ref = derivada $Xgrid{$ano}, $Utilidade{$ano};
$Cubic_aux{$ano} = $yt_ref;
}

#----DETERMINACAO DO MAXIMO PARA T=To-----

$xin = $Xgrid{$idade+1};
$yin = $Utilidade{$idade+1};
$yt = $Cubic_aux{$idade+1};
$max = -1000000000;
print "Matriz final: \n";
foreach $alfa (@alfagrid)
{ my $i;
  my $dif = $Xzero - $Cmin + $salario{$idade};
  my $C;
  print "Para alfa: $alfa ";
  foreach $i (0..($Cgrid-1))
  { $C = $Cmin + $i * $dif / ($Cgrid - 1);
    print "$C ";
    my $Fit = (($C / $C_substist{$idade})** $umgama - 1) / $umgama;
    my $valor = 0;
    my $dif_2 = $Xzero - $C + $salario{$idade};
    foreach (0..$tam_cenario)
    { my $aux = $dif_2 * ($alfa * $rv[$_] + (1 - $alfa) * $rf);

```

```
        $valor += $cenario[$_] * cubic $xin, $yin, $yt, $aux;
    }
    $Fit += $valor * $delta * $prob{$idade+1};
    print "$Fit ";
    if ( $Fit > $max )
    {
        $max = $Fit;
        $consumo = $C;
        $alfa_max = $alfa;
    }
}
print "\n";
}

#-----IMPRESSAO SOLUCAO OTIMA-----
print "Utilidade_otima: $max \n";
print "Consumo_otimo: $consumo \n";
print "Alfa_otimo: $alfa_max \n";
```

APÊNDICE VI: ESTRUTURA E EXEMPLO DOS ARQUIVOS DE ENTRADA E SAÍDA DE DADOS DO OTIMIZADOR

No Capítulo 5, apresentamos os resultados do modelo para três tipos padrão de indivíduos, especificados através das características presentes na **Tabela 5.2**. Com base nessas características e nas regras definidas no Capítulo 4 (resumidas na **Tabela 4.4**), podem ser elaborados os arquivos de entrada do programa de otimização para cada um deles. Antes de apresentarmos uma listagem exemplo do **Indivíduo A**, daremos uma breve explanação de como este arquivo deve ser escrito. Encerraremos este apêndice com as informações de saída do programa para cada mesmo **Indivíduo A**.

A entrada do programa é feita através de um arquivo tipo texto. O programa foi escrito de tal maneira que os números de entrada podem apresentar separação de decimais feita tanto por vírgulas quanto pontos. A única restrição é que nenhum destes dados apresente separação de milhares por algum caractere. O arquivo está estruturado em três grandes blocos, separados entre si por um linha em branco. O primeiro contém parâmetros básicos do cliente, que devem estar na seguinte ordem, separados pelo caractere de nova linha “\n”.

[Taxa livre de risco]
[Parâmetro de aversão a risco]
[fator de desconto temporal]
[Idade limite T]
[Idade atual]
[Riqueza inicial]
[M – número de valores discretos da variável consumo]
[Consumo mínimo total – 0,1]
[Parâmetro φ]

Os próximos parâmetros são os retornos esperados para o *portfolio* de mercado nos $N=7$ pontos de amostragem de Gauss, separados pelo caractere de espaço “ ”.

$$[r_{t,0}^M] [r_{t,1}^M] [r_{t,2}^M] [r_{t,3}^M] [r_{t,4}^M] [r_{t,5}^M] [r_{t,6}^M]$$

Os pesos de Gauss adaptados A_k também são informados ao modelo, separados por espaços “ ”.

$$[A_0] [A_1] [A_2] [A_3] [A_4] [A_5] [A_6]$$

O primeiro bloco do arquivo de entrada termina com a listagem de todos os valores de probabilidade de vida, salário esperado, probabilidade de perda de emprego, consumo mínimo de subsistência para cada ano de vida t do indivíduo, separados por espaços. Independentemente da idade inicial, esta listagem deve ser feita de $t=20$ até $t=90$. porém, logicamente, nem todos estes dados serão utilizados.

$$[20] [p_{20}] [L_{20}] [p_{v,20}] [C_{20}^{subs}]$$

$$[21] [p_{21}] [L_{21}] [p_{v,21}] [C_{21}^{subs}]$$

...

$$[90] [p_{90}] [L_{90}] [p_{v,90}] [C_{90}^{subs}]$$

O segundo bloco de dados, separado do primeiro por uma linha em branco, contém os J pontos iniciais $W_{t,j}$ para a interpolação por *spline* cúbica a cada estado t . De forma análoga à listagem anterior, esta deve ser feita para todo $20 \leq t \leq 90$.

$$[20] [W_{20,0}] [W_{20,1}] \dots [W_{20,J-1}]$$

$$[21] [W_{21,0}] [W_{21,1}] \dots [W_{21,J-1}]$$

...

$$[90] [W_{90,0}] [W_{90,1}] \dots [W_{90,J-1}]$$

O último bloco contém apenas os valores discretos da variável de alocação α_t , igual para todo t .

$$[0] [0,05] [0,1] [0,15] \dots [0,95] [1]$$

A seguir temos o arquivo de entrada impresso para o **Indivíduo A**.

```
1.095
1.40
0.930
90
23
0
50
0.1
0.25
0.00000000254 0.00001109135 0.06224193045 0.92356804067 0.06224193045 0.00001109135
0.00000000245
0.23 0.57 0.87 1.16 1.44 1.74 2.08
20 0.998 23.00 0.88 6.9
21 0.998 23.00 0.88 6.9
22 0.998 23.00 0.88 6.9
23 0.998 23.00 0.88 6.9
24 0.998 24.61 0.87 7.4
25 0.998 26.33 0.87 7.9
26 0.998 28.18 0.87 8.5
27 0.998 30.15 0.86 9.0
28 0.998 32.26 0.86 9.7
29 0.998 34.52 0.86 10.4
30 0.998 36.93 0.86 11.1
31 0.998 39.52 0.86 11.9
32 0.998 42.28 0.86 12.7
33 0.997 45.24 0.86 13.6
34 0.997 48.41 0.84 14.5
35 0.997 51.80 0.83 15.5
36 0.997 55.43 0.82 16.6
37 0.997 59.31 0.82 17.8
38 0.997 63.46 0.81 19.0
39 0.996 67.90 0.81 20.4
40 0.996 72.65 0.80 21.8
41 0.996 77.74 0.79 23.3
42 0.996 83.18 0.79 25.0
43 0.995 89.00 0.78 26.7
44 0.995 95.23 0.78 28.6
45 0.995 101.90 0.77 30.6
46 0.994 109.03 0.77 32.7
47 0.994 116.66 0.76 35.0
48 0.993 124.83 0.76 37.4
49 0.993 133.57 0.75 40.1
50 0.992 142.92 0.74 42.9
51 0.992 142.92 0.73 42.9
52 0.991 142.92 0.71 42.9
53 0.991 142.92 0.68 42.9
54 0.990 142.92 0.67 42.9
55 0.989 142.92 0.66 42.9
56 0.988 142.92 0.65 42.9
57 0.987 142.92 0.64 42.9
58 0.986 142.92 0.63 42.9
59 0.985 142.92 0.62 42.9
60 0.984 142.92 0.61 42.9
61 0.983 142.92 0.60 42.9
62 0.981 142.92 0.57 42.9
63 0.980 142.92 0.55 42.9
64 0.978 142.92 0.54 42.9
65 0.977 142.92 0.54 42.9
66 0.975 18.00 1.00 30.0
67 0.973 18.00 1.00 30.0
68 0.970 18.00 1.00 30.0
69 0.967 18.00 1.00 30.0
70 0.963 18.00 1.00 30.0
71 0.960 18.00 1.00 30.0
72 0.955 18.00 1.00 30.0
73 0.951 18.00 1.00 30.0
74 0.946 18.00 1.00 30.0
75 0.940 18.00 1.00 30.0
```

Apêndice VI – Estrutura e exemplo dos arquivos de entrada e saída de dados do otimizador

```
76 0.934 18.00 1.00 30.0
77 0.927 18.00 1.00 30.0
78 0.920 18.00 1.00 30.0
79 0.912 18.00 1.00 30.0
80 0.905 18.00 1.00 30.0
81 0.895 18.00 1.00 30.0
82 0.885 18.00 1.00 30.0
83 0.874 18.00 1.00 30.0
84 0.861 18.00 1.00 30.0
85 0.847 18.00 1.00 30.0
86 0.832 18.00 1.00 30.0
87 0.816 18.00 1.00 30.0
88 0.798 18.00 1.00 30.0
89 0.778 18.00 1.00 30.0
90 0.756 18.00 1.00 30.0

20 1.0 1.5 2.2 3.2 4.7 6.9 7.2 7.5 7.8 8.1 8.4 8.8 9.1 9.5 9.9 10.3 10.7 11.2 11.6
    12.1 12.6 13.1 13.6 14.2 14.8 15.4 16.0 16.7 17.4 18.1 18.8 19.6 20.4 21.2 22.1
    23.0 23.9 24.9 25.9 27.0 28.1 29.3 30.5 31.7 33.0 33.0 33.0 33.0 33.0 33.0
21 1.0 1.5 2.2 3.2 4.7 6.9 7.2 7.5 7.8 8.1 8.4 8.8 9.1 9.5 9.9 10.3 10.7 11.2 11.6
    12.1 12.6 13.1 13.6 14.2 14.8 15.4 16.0 16.7 17.4 18.1 18.8 19.6 20.4 21.2 22.1
    23.0 23.9 24.9 25.9 27.0 28.1 29.3 30.5 31.7 33.0 33.0 33.0 33.0 33.0 33.0
22 1.0 1.5 2.2 3.2 4.7 6.9 7.2 7.5 7.8 8.1 8.4 8.8 9.1 9.5 9.9 10.3 10.7 11.2 11.6
    12.1 12.6 13.1 13.6 14.2 14.8 15.4 16.0 16.7 17.4 18.1 18.8 19.6 20.4 21.2 22.1
    23.0 23.9 24.9 25.9 27.0 28.1 29.3 30.5 31.7 33.0 33.0 33.0 33.0 33.0 33.0
23 1.0 1.5 2.2 3.2 4.7 6.9 7.2 7.5 7.8 8.1 8.4 8.8 9.1 9.5 9.9 10.3 10.7 11.2 11.6
    12.1 12.6 13.1 13.6 14.2 14.8 15.4 16.0 16.7 17.4 18.1 18.8 19.6 20.4 21.2 22.1
    23.0 23.9 24.9 25.9 27.0 28.1 29.3 30.5 31.7 33.0 33.0 33.0 33.0 33.0 33.0
24 1.0 1.5 2.2 3.3 4.9 7.4 7.8 8.2 8.7 9.2 9.7 10.2 10.8 11.4 12.0 12.7 13.4 14.1
    14.9 15.8 16.6 17.6 18.5 19.6 20.7 21.8 23.0 24.3 25.6 27.1 28.6 30.2 31.9 33.6
    35.5 37.5 39.6 41.8 44.1 46.5 49.1 51.9 54.7 57.8 61.0 62.0 63.0 64.0 65.0 66.0
25 1.0 1.5 2.3 3.5 5.2 7.9 8.5 9.1 9.8 10.5 11.3 12.1 13.0 14.0 15.0 16.1 17.3 18.6
    19.9 21.4 23.0 24.7 26.5 28.5 30.6 32.8 35.2 37.8 40.6 43.6 46.9 50.3 54.0 58.0
    62.3 66.9 71.8 77.1 82.8 89.0 95.5 102.6 110.1 118.3 127.0 128.0 129.0 130.0
    131.0 132.0
26 1.0 1.5 2.3 3.6 5.5 8.5 9.2 10.1 11.0 12.0 13.1 14.3 15.6 17.1 18.6 20.3 22.2 24.2
    26.5 28.9 31.5 34.4 37.6 41.0 44.8 48.9 53.4 58.3 63.6 69.4 75.8 82.8 90.4 98.6
    107.7 117.6 128.4 140.1 153.0 167.0 182.3 199.1 217.3 237.2 259.0 260.0 261.0
    262.0 263.0 264.0
27 1.0 1.6 2.4 3.7 5.8 9.0 10.0 11.1 12.4 13.7 15.2 16.9 18.7 20.8 23.1 25.6 28.4
    31.5 35.0 38.8 43.1 47.8 53.0 58.8 65.3 72.4 80.4 89.2 99.0 109.8 121.9 135.2
    150.1 166.5 184.8 205.0 227.5 252.5 280.2 310.9 345.0 382.8 424.8 471.3 523.0
    524.0 525.0 526.0 527.0 528.0
28 1.0 1.6 2.5 3.9 6.1 9.7 10.9 12.3 13.9 15.7 17.7 19.9 22.4 25.3 28.5 32.2 36.3
    40.9 46.2 52.1 58.7 66.2 74.7 84.2 95.0 107.1 120.8 136.2 153.6 173.2 195.3 220.3
    248.4 280.2 315.9 356.3 401.8 453.1 511.0 576.2 649.8 732.8 826.4 932.0 1051.0
    1052.0 1053.0 1054.0 1055.0 1056.0
29 1.0 1.6 2.5 4.1 6.5 10.4 11.9 13.6 15.6 17.9 20.5 23.5 26.9 30.8 35.3 40.5 46.4
    53.1 60.9 69.8 80.0 91.7 105.1 120.4 138.0 158.1 181.2 207.7 238.0 272.8 312.6
    358.2 410.5 470.5 539.2 617.9 708.1 811.6 930.1 1065.9 1221.5 1399.9 1604.3
    1838.5 2107.0 2108.0 2109.0 2110.0 2111.0 2112.0
30 1.0 1.6 2.6 4.2 6.8 11.1 12.9 15.0 17.5 20.4 23.7 27.6 32.2 37.5 43.7 50.8 59.2
    69.0 80.3 93.5 108.9 126.8 147.7 172.0 200.3 233.3 271.7 316.4 368.5 429.2 499.8
    582.1 677.9 789.5 919.4 1070.7 1246.9 1452.2 1691.2 1969.5 2293.6 2671.1 3110.8
    3622.8 4219.0 4220.0 4221.0 4222.0 4223.0 4224.0
31 1.0 1.6 2.7 4.4 7.2 11.9 13.8 16.0 18.6 21.7 25.2 29.3 34.0 39.6 46.0 53.5 62.2
    72.3 84.0 97.7 113.6 132.1 153.5 178.5 207.5 241.3 280.5 326.1 379.2 440.8 512.5
    595.8 692.7 805.3 936.3 1088.5 1265.5 1471.3 1710.5 1988.6 2312.0 2687.9 3125.0
    3633.1 4223.9 4852.0 5573.5 6402.3 7354.4 8448.0
32 1.0 1.7 2.8 4.6 7.6 12.7 14.7 17.1 19.8 23.0 26.7 31.0 36.0 41.8 48.5 56.2 65.3
    75.8 87.9 102.0 118.4 137.4 159.5 185.1 214.9 249.4 289.4 335.9 389.8 452.4 525.1
    609.4 707.3 820.8 952.7 1105.6 1283.2 1489.3 1728.4 2006.0 2328.1 2702.0 3135.8
    3639.4 4223.9 5573.4 7354.3 9704.1 12804.7 16896.0
33 1.0 1.7 2.8 4.8 8.1 13.6 15.7 18.2 21.1 24.5 28.3 32.8 38.0 44.1 51.1 59.1 68.5
    79.4 92.0 106.6 123.5 143.0 165.7 192.0 222.5 257.7 298.6 345.9 400.8 464.4 538.0
    623.3 722.1 836.7 969.3 1123.0 1301.1 1507.5 1746.5 2023.4 2344.3 2716.1 3146.7
    3645.7 4223.9 6402.2 9704.0 14708.6 22294.3 33792.0
34 1.0 1.7 2.9 5.0 8.5 14.5 16.8 19.4 22.5 26.0 30.1 34.8 40.2 46.5 53.8 62.2 71.9
    83.2 96.2 111.3 128.7 148.9 172.2 199.1 230.3 266.4 308.1 356.3 412.1 476.6 551.2
    637.5 737.3 852.8 986.3 1140.7 1319.3 1525.9 1764.8 2041.1 2360.6 2730.2 3157.7
    3652.1 4223.9 7354.2 12804.5 22294.1 38816.5 67584.0
35 1.0 1.7 3.0 5.2 9.0 15.5 17.9 20.7 23.9 27.6 31.9 36.8 42.5 49.1 56.7 65.4 75.5
    87.2 100.7 116.2 134.2 154.9 178.9 206.5 238.4 275.3 317.8 367.0 423.7 489.2
```

Apêndice VI – Estrutura e exemplo dos arquivos de entrada e saída de dados do otimizador

```
564.8 652.1 752.8 869.2 1003.6 1158.7 1337.7 1544.5 1783.2 2058.9 2377.1 2744.5
3168.7 3658.4 4223.9 8447.8 16895.7 33791.5 67583.5 135168.0
36 1.0 1.8 3.1 5.4 9.5 16.6 19.2 22.1 25.5 29.3 33.8 39.0 44.9 51.8 59.7 68.8 79.3
91.4 105.3 121.4 139.9 161.2 185.8 214.2 246.9 284.5 327.9 377.9 435.6 502.1
578.7 666.9 768.7 886.0 1021.1 1176.9 1356.4 1563.4 1801.9 2076.8 2393.6 2758.8
3179.7 3664.8 4223.9 9703.9 22293.9 51218.4 117669.8 270336.0
37 1.0 1.8 3.2 5.6 10.0 17.8 20.5 23.6 27.1 31.2 35.9 41.3 47.5 54.6 62.9 72.3 83.2
95.8 110.2 126.8 145.8 167.8 193.1 222.1 255.6 294.0 338.3 389.3 447.9 515.3
592.9 682.2 784.9 903.0 1039.0 1195.4 1375.4 1582.5 1820.7 2094.9 2410.3 2773.2
3190.7 3671.1 4223.9 11146.9 29417.0 77632.6 204875.0 540672.0
38 1.0 1.8 3.2 5.9 10.6 19.0 21.9 25.1 28.8 33.1 38.1 43.7 50.2 57.7 66.2 76.1 87.4
100.3 115.2 132.4 152.0 174.6 200.6 230.4 264.6 303.9 349.1 400.9 460.5 528.9
607.5 697.7 801.4 920.4 1057.2 1214.2 1394.6 1601.8 1839.8 2113.1 2427.1 2787.7
3201.8 3677.5 4223.9 12804.4 38816.0 117669.0 356708.1 1081344.0
39 1.0 1.8 3.3 6.1 11.1 20.4 23.4 26.8 30.7 35.2 40.4 46.3 53.1 60.8 69.8 80.0 91.7
105.2 120.6 138.2 158.5 181.7 208.4 238.9 273.9 314.1 360.1 412.9 473.4 542.8
622.4 713.6 818.2 938.2 1075.7 1233.3 1414.1 1621.4 1859.0 2131.5 2444.0 2802.2
3212.9 3683.9 4223.9 14708.4 51218.0 178352.8 621064.8 2162688.0
40 1.0 1.9 3.4 6.4 11.8 21.8 24.9 28.6 32.7 37.4 42.8 49.0 56.1 64.2 73.5 84.1 96.3
110.2 126.1 144.4 165.2 189.1 216.5 247.8 283.6 324.6 371.5 425.3 486.8 557.1
637.7 729.9 835.4 956.2 1094.5 1252.7 1433.9 1641.2 1878.5 2150.1 2461.0 2816.8
3224.1 3690.3 4223.9 16895.5 67582.6 270332.3 1081336.6 4325376.0
41 1.0 1.9 3.5 6.6 12.4 23.3 26.6 30.4 34.8 39.8 45.4 51.9 59.3 67.8 77.4 88.5 101.1
115.5 131.9 150.8 172.3 196.8 224.9 257.0 293.6 335.5 383.3 438.0 500.5 571.8
653.4 746.5 853.0 974.7 1113.6 1272.5 1453.9 1661.3 1898.2 2168.8 2478.1 2831.5
3235.3 3696.7 4223.9 19407.9 89175.8 409747.2 1882716.4 8650752.0
42 1.0 1.9 3.6 6.9 13.1 25.0 28.5 32.5 37.0 42.2 48.2 55.0 62.7 71.5 81.6 93.0 106.1
121.0 138.0 157.4 179.6 204.8 233.7 266.5 304.0 346.7 395.5 451.1 514.5 586.9
669.4 763.6 871.0 993.4 1133.1 1292.5 1474.2 1681.5 1918.0 2187.7 2495.4 2846.3
3246.6 3703.1 4223.9 22293.8 117668.2 621060.6 3277999.6 17301504.0
43 1.0 1.9 3.7 7.2 13.8 26.7 30.4 34.6 39.4 44.9 51.1 58.2 66.3 75.4 85.9 97.8 111.4
126.8 144.4 164.4 187.2 213.2 242.7 276.4 314.7 358.4 408.0 464.6 529.0 602.4
685.9 781.0 889.3 1012.6 1153.0 1312.8 1494.8 1702.1 1938.1 2206.8 2512.8 2861.2
3257.8 3709.5 4223.9 25608.8 155264.1 941351.8 5707328.9 34603008.0
44 1.0 2.0 3.8 7.5 14.6 28.6 32.5 36.9 42.0 47.7 54.2 61.6 70.0 79.6 90.5 102.9 116.9
132.9 151.1 171.7 195.2 221.9 252.2 286.7 325.8 370.4 421.0 478.5 543.9 618.3
702.8 798.8 908.0 1032.1 1173.1 1333.5 1515.7 1722.9 1958.4 2226.0 2530.3 2876.1
3269.2 3716.0 4223.9 29416.8 204872.2 1426822.5 9937036.7 69206016.0
45 1.0 2.0 3.9 7.8 15.4 30.6 34.7 39.4 44.7 50.7 57.5 65.3 74.0 84.0 95.3 108.2 122.7
139.3 158.0 179.3 203.5 230.9 262.0 297.3 337.3 382.8 434.3 492.8 559.2 634.6
720.0 817.0 927.1 1052.0 1193.7 1354.5 1536.9 1743.9 1978.9 2245.4 2547.9 2891.1
3280.5 3722.4 4223.9 33791.1 270330.5 2162658.5 17301385.8 138412032.0
46 1.0 2.0 4.0 8.1 16.3 32.7 37.1 42.0 47.5 53.9 61.0 69.1 78.3 88.7 100.4 113.8
128.9 146.0 165.3 187.3 212.1 240.3 272.2 308.3 349.2 395.6 448.1 507.6 575.0
651.3 737.7 835.7 946.6 1072.2 1214.6 1375.8 1558.4 1765.2 1999.6 2265.0 2565.6
2906.2 3291.9 3728.9 4223.9 38815.8 356703.2 3277977.3 30123462.4 276824064.0
47 1.0 2.0 4.1 8.4 17.2 35.0 39.6 44.8 50.6 57.2 64.7 73.2 82.7 93.6 105.8 119.6
135.3 153.0 173.0 195.6 221.2 250.1 282.8 319.8 361.6 408.9 462.3 522.8 591.2
668.5 755.9 854.7 966.5 1092.9 1235.8 1397.4 1580.2 1786.8 2020.5 2284.7 2583.5
2921.3 3303.4 3735.4 4223.9 44587.6 470672.7 4968484.4 52447994.3 553648128.0
48 1.0 2.1 4.3 8.8 18.1 37.4 42.3 47.7 53.9 60.8 68.6 77.5 87.5 98.7 111.4 125.8
142.0 160.3 180.9 204.2 230.6 260.3 293.8 331.6 374.3 422.6 477.0 538.4 607.8
686.1 774.5 874.2 986.8 1113.9 1257.4 1419.4 1602.3 1808.6 2041.6 2304.6 2601.5
2936.6 3314.9 3741.9 4223.9 51217.7 621056.3 7530814.2 91317261.9 1107296256.0
49 1.0 2.1 4.4 9.2 19.2 40.1 45.2 50.9 57.3 64.6 72.8 82.0 92.5 104.2 117.4 132.3
149.1 168.0 189.3 213.3 240.4 270.8 305.2 343.9 387.6 436.7 492.1 554.5 624.9
704.2 793.5 894.2 1007.6 1135.4 1279.4 1441.8 1624.6 1830.7 2063.0 2324.7 2619.6
2951.9 3326.4 3748.4 4223.9 58833.7 819488.7 11414579.8 158992587.6 2214592512.0
50 1.0 2.1 4.5 9.5 20.2 42.9 48.2 54.3 61.0 68.7 77.2 86.9 97.7 109.9 123.7 139.1
156.5 176.0 198.0 222.8 250.6 281.9 317.1 356.7 401.2 451.4 507.7 571.1 642.5
722.7 813.0 914.6 1028.8 1157.3 1301.8 1464.4 1647.4 1853.1 2084.6 2344.9 2637.8
2967.3 3337.9 3754.9 4223.9 67582.2 1081321.8 17301267.7 276822173.4 4429185024.0
51 1.0 2.1 4.5 9.5 20.2 42.9 48.2 54.3 61.0 68.7 77.2 86.9 97.7 109.9 123.7 139.1
156.5 176.0 198.0 222.8 250.6 281.9 317.1 356.7 401.2 451.4 507.7 571.1 642.5
722.7 813.0 914.6 1028.8 1157.3 1301.8 1464.4 1647.4 1853.1 2084.6 2344.9 2637.8
2967.3 3337.9 3754.9 4223.9 77631.5 1426812.7 26223818.0 481975398.1 8858370048.0
52 1.0 2.1 4.5 9.5 20.2 42.9 48.2 54.3 61.0 68.7 77.2 86.9 97.7 109.9 123.7 139.1
156.5 176.0 198.0 222.8 250.6 281.9 317.1 356.7 401.2 451.4 507.7 571.1 642.5
722.7 813.0 914.6 1028.8 1157.3 1301.8 1464.4 1647.4 1853.1 2084.6 2344.9 2637.8
2967.3 3337.9 3754.9 4223.9 89175.2 1882690.7 39747875.5 839167908.5
17716740096.0
53 1.0 2.1 4.5 9.5 20.2 42.9 48.2 54.3 61.0 68.7 77.2 86.9 97.7 109.9 123.7 139.1
156.5 176.0 198.0 222.8 250.6 281.9 317.1 356.7 401.2 451.4 507.7 571.1 642.5
```

Apêndice VI – Estrutura e exemplo dos arquivos de entrada e saída de dados do otimizador

```
722.7 813.0 914.6 1028.8 1157.3 1301.8 1464.4 1647.4 1853.1 2084.6 2344.9 2637.8
2967.3 3337.9 3754.9 4223.9 102435.4 2484225.2 60246513.3 1461076191.0
35433480192.0
54 1.0 2.1 4.5 9.5 20.2 42.9 48.2 54.3 61.0 68.7 77.2 86.9 97.7 109.9 123.7 139.1
156.5 176.0 198.0 222.8 250.6 281.9 317.1 356.7 401.2 451.4 507.7 571.1 642.5
722.7 813.0 914.6 1028.8 1157.3 1301.8 1464.4 1647.4 1853.1 2084.6 2344.9 2637.8
2967.3 3337.9 3754.9 4223.9 117667.4 3277954.9 91316638.3 2543881402.1
70866960384.0
55 1.0 2.1 4.5 9.5 20.2 42.9 48.2 54.3 61.0 68.7 77.2 86.9 97.7 109.9 123.7 139.1
156.5 176.0 198.0 222.8 250.6 281.9 317.1 356.7 401.2 451.4 507.7 571.1 642.5
722.7 813.0 914.6 1028.8 1157.3 1301.8 1464.4 1647.4 1853.1 2084.6 2344.9 2637.8
2967.3 3337.9 3754.9 4223.9 135164.3 4325287.4 138410141.5 4429154775.1
141733920768.0
56 1.0 2.1 4.5 9.5 20.2 42.9 48.2 54.3 61.0 68.7 77.2 86.9 97.7 109.9 123.7 139.1
156.5 176.0 198.0 222.8 250.6 281.9 317.1 356.7 401.2 451.4 507.7 571.1 642.5
722.7 813.0 914.6 1028.8 1157.3 1301.8 1464.4 1647.4 1853.1 2084.6 2344.9 2637.8
2967.3 3337.9 3754.9 4223.9 155263.0 5707250.9 209790544.4 7711606368.8
283467841536.0
57 1.0 2.1 4.5 9.5 20.2 42.9 48.2 54.3 61.0 68.7 77.2 86.9 97.7 109.9 123.7 139.1
156.5 176.0 198.0 222.8 250.6 281.9 317.1 356.7 401.2 451.4 507.7 571.1 642.5
722.7 813.0 914.6 1028.8 1157.3 1301.8 1464.4 1647.4 1853.1 2084.6 2344.9 2637.8
2967.3 3337.9 3754.9 4223.9 178350.4 7530762.7 317983003.6 13426686536.6
566935683072.0
58 1.0 2.1 4.5 9.5 20.2 42.9 48.2 54.3 61.0 68.7 77.2 86.9 97.7 109.9 123.7 139.1
156.5 176.0 198.0 222.8 250.6 281.9 317.1 356.7 401.2 451.4 507.7 571.1 642.5
722.7 813.0 914.6 1028.8 1157.3 1301.8 1464.4 1647.4 1853.1 2084.6 2344.9 2637.8
2967.3 3337.9 3754.9 4223.9 204870.8 9936901.0 481972106.4 23377219055.3
1133871366144.0
59 1.0 2.1 4.5 9.5 20.2 42.9 48.2 54.3 61.0 68.7 77.2 86.9 97.7 109.9 123.7 139.1
156.5 176.0 198.0 222.8 250.6 281.9 317.1 356.7 401.2 451.4 507.7 571.1 642.5
722.7 813.0 914.6 1028.8 1157.3 1301.8 1464.4 1647.4 1853.1 2084.6 2344.9 2637.8
2967.3 3337.9 3754.9 4223.9 235334.7 13111819.5 730533106.3 40702102433.7
2267742732288.0
60 1.0 2.1 4.5 9.5 20.2 42.9 48.2 54.3 61.0 68.7 77.2 86.9 97.7 109.9 123.7 139.1
156.5 176.0 198.0 222.8 250.6 281.9 317.1 356.7 401.2 451.4 507.7 571.1 642.5
722.7 813.0 914.6 1028.8 1157.3 1301.8 1464.4 1647.4 1853.1 2084.6 2344.9 2637.8
2967.3 3337.9 3754.9 4223.9 270328.6 17301149.5 1107281131.6 70866476402.0
4535485464576.0
61 1.0 2.1 4.5 9.5 20.2 42.9 48.2 54.3 61.0 68.7 77.2 86.9 97.7 109.9 123.7 139.1
156.5 176.0 198.0 222.8 250.6 281.9 317.1 356.7 401.2 451.4 507.7 571.1 642.5
722.7 813.0 914.6 1028.8 1157.3 1301.8 1464.4 1647.4 1853.1 2084.6 2344.9 2637.8
2967.3 3337.9 3754.9 4223.9 310526.0 22829003.7 1678324355.0 123385701901.2
9070970929152.0
62 1.0 2.1 4.5 9.5 20.2 42.9 48.2 54.3 61.0 68.7 77.2 86.9 97.7 109.9 123.7 139.1
156.5 176.0 198.0 222.8 250.6 281.9 317.1 356.7 401.2 451.4 507.7 571.1 642.5
722.7 813.0 914.6 1028.8 1157.3 1301.8 1464.4 1647.4 1853.1 2084.6 2344.9 2637.8
2967.3 3337.9 3754.9 4223.9 356700.7 30123050.9 2543864028.8 214826984585.5
18141941858304.0
63 1.0 2.1 4.5 9.5 20.2 42.9 48.2 54.3 61.0 68.7 77.2 86.9 97.7 109.9 123.7 139.1
156.5 176.0 198.0 222.8 250.6 281.9 317.1 356.7 401.2 451.4 507.7 571.1 642.5
722.7 813.0 914.6 1028.8 1157.3 1301.8 1464.4 1647.4 1853.1 2084.6 2344.9 2637.8
2967.3 3337.9 3754.9 4223.9 409741.6 39747604.0 3855776851.4 374035504884.2
36283883716608.0
64 1.0 2.1 4.5 9.5 20.2 42.9 48.2 54.3 61.0 68.7 77.2 86.9 97.7 109.9 123.7 139.1
156.5 176.0 198.0 222.8 250.6 281.9 317.1 356.7 401.2 451.4 507.7 571.1 642.5
722.7 813.0 914.6 1028.8 1157.3 1301.8 1464.4 1647.4 1853.1 2084.6 2344.9 2637.8
2967.3 3337.9 3754.9 4223.9 470669.5 52447277.9 5844264850.5 651233638939.4
72567767433216.0
65 1.0 2.1 4.5 9.5 20.2 42.9 48.2 54.3 61.0 68.7 77.2 86.9 97.7 109.9 123.7 139.1
156.5 176.0 198.0 222.8 250.6 281.9 317.1 356.7 401.2 451.4 507.7 571.1 642.5
722.7 813.0 914.6 1028.8 1157.3 1301.8 1464.4 1647.4 1853.1 2084.6 2344.9 2637.8
2967.3 3337.9 3754.9 4223.9 540657.2 69204598.1 8858249052.9 1133863622432.2
145135534866432.0
66 1.0 2.0 4.1 8.3 16.9 34.3 38.8 43.9 49.7 56.2 63.6 71.9 81.4 92.1 104.2 117.8
133.3 150.8 170.6 193.1 218.4 247.1 279.6 316.3 357.9 404.9 458.0 518.2 586.3
663.3 750.4 849.0 960.5 1086.7 1229.4 1390.9 1573.6 1780.4 2014.2 2278.8 2578.2
2916.8 3300.0 3733.4 4223.9 621052.1 91316014.6 13426594839.8 1974171230418.7
290271069732864.0
67 1.0 2.0 4.1 8.3 16.9 34.3 38.8 43.9 49.7 56.2 63.6 71.9 81.4 92.1 104.2 117.8
133.3 150.8 170.6 193.1 218.4 247.1 279.6 316.3 357.9 404.9 458.0 518.2 586.3
663.3 750.4 849.0 960.5 1086.7 1229.4 1390.9 1573.6 1780.4 2014.2 2278.8 2578.2
2916.8 3300.0 3733.4 4223.9 713401.5 120492203.7 20350912230.5 3437231753368.1
580542139465728.0
```

Apêndice VI – Estrutura e exemplo dos arquivos de entrada e saída de dados do otimizador

68 1.0 2.0 4.1 8.3 16.9 34.3 38.8 43.9 49.7 56.2 63.6 71.9 81.4 92.1 104.2 117.8
133.3 150.8 170.6 193.1 218.4 247.1 279.6 316.3 357.9 404.9 458.0 518.2 586.3
663.3 750.4 849.0 960.5 1086.7 1229.4 1390.9 1573.6 1780.4 2014.2 2278.8 2578.2
2916.8 3300.0 3733.4 4223.9 819483.1 158990416.0 30846214811.3 5984568078147.8
1161084278931460.0

69 1.0 2.0 4.1 8.3 16.9 34.3 38.8 43.9 49.7 56.2 63.6 71.9 81.4 92.1 104.2 117.8
133.3 150.8 170.6 193.1 218.4 247.1 279.6 316.3 357.9 404.9 458.0 518.2 586.3
663.3 750.4 849.0 960.5 1086.7 1229.4 1390.9 1573.6 1780.4 2014.2 2278.8 2578.2
2916.8 3300.0 3733.4 4223.9 941338.9 209789111.6 46754118803.7 10419738223031.1
2322168557862910.0

70 1.0 2.0 4.1 8.3 16.9 34.3 38.8 43.9 49.7 56.2 63.6 71.9 81.4 92.1 104.2 117.8
133.3 150.8 170.6 193.1 218.4 247.1 279.6 316.3 357.9 404.9 458.0 518.2 586.3
663.3 750.4 849.0 960.5 1086.7 1229.4 1390.9 1573.6 1780.4 2014.2 2278.8 2578.2
2916.8 3300.0 3733.4 4223.9 1081314.5 276818392.4 70865992423.3 18141817958915.8
4644337115725820.0

71 1.0 2.0 4.1 8.3 16.9 34.3 38.8 43.9 49.7 56.2 63.6 71.9 81.4 92.1 104.2 117.8
133.3 150.8 170.6 193.1 218.4 247.1 279.6 316.3 357.9 404.9 458.0 518.2 586.3
663.3 750.4 849.0 960.5 1086.7 1229.4 1390.9 1573.6 1780.4 2014.2 2278.8 2578.2
2916.8 3300.0 3733.4 4223.9 1242104.1 365264058.6 107412758718.2 31586739686699.7
9288674231451650.0

72 1.0 2.0 4.1 8.3 16.9 34.3 38.8 43.9 49.7 56.2 63.6 71.9 81.4 92.1 104.2 117.8
133.3 150.8 170.6 193.1 218.4 247.1 279.6 316.3 357.9 404.9 458.0 518.2 586.3
663.3 750.4 849.0 960.5 1086.7 1229.4 1390.9 1573.6 1780.4 2014.2 2278.8 2578.2
2916.8 3300.0 3733.4 4223.9 1426803.0 481968814.8 162807297843.8 54995708053889.2
18577348462903300.0

73 1.0 2.0 4.1 8.3 16.9 34.3 38.8 43.9 49.7 56.2 63.6 71.9 81.4 92.1 104.2 117.8
133.3 150.8 170.6 193.1 218.4 247.1 279.6 316.3 357.9 404.9 458.0 518.2 586.3
663.3 750.4 849.0 960.5 1086.7 1229.4 1390.9 1573.6 1780.4 2014.2 2278.8 2578.2
2916.8 3300.0 3733.4 4223.9 1638966.2 635961663.9 246769718490.7 95753089250364.6
37154696925806600.0

74 1.0 2.0 4.1 8.3 16.9 34.3 38.8 43.9 49.7 56.2 63.6 71.9 81.4 92.1 104.2 117.8
133.3 150.8 170.6 193.1 218.4 247.1 279.6 316.3 357.9 404.9 458.0 518.2 586.3
663.3 750.4 849.0 960.5 1086.7 1229.4 1390.9 1573.6 1780.4 2014.2 2278.8 2578.2
2916.8 3300.0 3733.4 4223.9 1882677.8 839156446.5 374032950429.5
166715811568498.0 74309393851613200.0

75 1.0 2.0 4.1 8.3 16.9 34.3 38.8 43.9 49.7 56.2 63.6 71.9 81.4 92.1 104.2 117.8
133.3 150.8 170.6 193.1 218.4 247.1 279.6 316.3 357.9 404.9 458.0 518.2 586.3
663.3 750.4 849.0 960.5 1086.7 1229.4 1390.9 1573.6 1780.4 2014.2 2278.8 2578.2
2916.8 3300.0 3733.4 4223.9 2162628.9 1107273569.5 566927939386.7
290269087342652.0 148618787703226000.0

76 1.0 2.0 4.1 8.3 16.9 34.3 38.8 43.9 49.7 56.2 63.6 71.9 81.4 92.1 104.2 117.8
133.3 150.8 170.6 193.1 218.4 247.1 279.6 316.3 357.9 404.9 458.0 518.2 586.3
663.3 750.4 849.0 960.5 1086.7 1229.4 1390.9 1573.6 1780.4 2014.2 2278.8 2578.2
2916.8 3300.0 3733.4 4223.9 2484208.3 1461056234.3 859302069746.0
505387834987198.0 297237575406453000.0

77 1.0 2.0 4.1 8.3 16.9 34.3 38.8 43.9 49.7 56.2 63.6 71.9 81.4 92.1 104.2 117.8
133.3 150.8 170.6 193.1 218.4 247.1 279.6 316.3 357.9 404.9 458.0 518.2 586.3
663.3 750.4 849.0 960.5 1086.7 1229.4 1390.9 1573.6 1780.4 2014.2 2278.8 2578.2
2916.8 3300.0 3733.4 4223.9 2853606.0 1927875259.3 1302458382750.7
879931328862228.0 594475150812905000.0

78 1.0 2.0 4.1 8.3 16.9 34.3 38.8 43.9 49.7 56.2 63.6 71.9 81.4 92.1 104.2 117.8
133.3 150.8 170.6 193.1 218.4 247.1 279.6 316.3 357.9 404.9 458.0 518.2 586.3
663.3 750.4 849.0 960.5 1086.7 1229.4 1390.9 1573.6 1780.4 2014.2 2278.8 2578.2
2916.8 3300.0 3733.4 4223.9 3277932.5 2543846655.6 1974157747925.5
1532049428005830.0 1188950301625810000.0

79 1.0 2.0 4.1 8.3 16.9 34.3 38.8 43.9 49.7 56.2 63.6 71.9 81.4 92.1 104.2 117.8
133.3 150.8 170.6 193.1 218.4 247.1 279.6 316.3 357.9 404.9 458.0 518.2 586.3
663.3 750.4 849.0 960.5 1086.7 1229.4 1390.9 1573.6 1780.4 2014.2 2278.8 2578.2
2916.8 3300.0 3733.4 4223.9 3765355.7 3356625785.9 2992263603435.6
2667452985095970.0 2377900603251620000.0

80 1.0 2.0 4.1 8.3 16.9 34.3 38.8 43.9 49.7 56.2 63.6 71.9 81.4 92.1 104.2 117.8
133.3 150.8 170.6 193.1 218.4 247.1 279.6 316.3 357.9 404.9 458.0 518.2 586.3
663.3 750.4 849.0 960.5 1086.7 1229.4 1390.9 1573.6 1780.4 2014.2 2278.8 2578.2
2916.8 3300.0 3733.4 4223.9 4325257.8 4429094278.0 4535423515093.5
4644305397482460.0 4755801206503240000.0

81 1.0 2.0 4.1 8.3 16.9 34.3 38.8 43.9 49.7 56.2 63.6 71.9 81.4 92.1 104.2 117.8
133.3 150.8 170.6 193.1 218.4 247.1 279.6 316.3 357.9 404.9 458.0 518.2 586.3
663.3 750.4 849.0 960.5 1086.7 1229.4 1390.9 1573.6 1780.4 2014.2 2278.8 2578.2
2916.8 3300.0 3733.4 4223.9 4968416.6 5844224937.4 6874416557968.0
8086205359795170.0 9511602413006490000.0

82 1.0 2.0 4.1 8.3 16.9 34.3 38.8 43.9 49.7 56.2 63.6 71.9 81.4 92.1 104.2 117.8
133.3 150.8 170.6 193.1 218.4 247.1 279.6 316.3 357.9 404.9 458.0 518.2 586.3
663.3 750.4 849.0 960.5 1086.7 1229.4 1390.9 1573.6 1780.4 2014.2 2278.8 2578.2

Apêndice VI – Estrutura e exemplo dos arquivos de entrada e saída de dados do otimizador

```
2916.8 3300.0 3733.4 4223.9 5707211.9 7711501037.2 10419667062005.4
14078901261795600.0 19023204826013000000.0
83 1.0 2.0 4.1 8.3 16.9 34.3 38.8 43.9 49.7 56.2 63.6 71.9 81.4 92.1 104.2 117.8
133.3 150.8 170.6 193.1 218.4 247.1 279.6 316.3 357.9 404.9 458.0 518.2 586.3
663.3 750.4 849.0 960.5 1086.7 1229.4 1390.9 1573.6 1780.4 2014.2 2278.8 2578.2
2916.8 3300.0 3733.4 4223.9 6555865.0 10175386622.5 15793261983404.3
24512790848093300.0 38046409652026000000.0
84 1.0 2.0 4.1 8.3 16.9 34.3 38.8 43.9 49.7 56.2 63.6 71.9 81.4 92.1 104.2 117.8
133.3 150.8 170.6 193.1 218.4 247.1 279.6 316.3 357.9 404.9 458.0 518.2 586.3
663.3 750.4 849.0 960.5 1086.7 1229.4 1390.9 1573.6 1780.4 2014.2 2278.8 2578.2
2916.8 3300.0 3733.4 4223.9 7530711.3 13426503143.6 23938108827484.9
42679247761535600.0 76092819304051900000.0
85 1.0 2.0 4.1 8.3 16.9 34.3 38.8 43.9 49.7 56.2 63.6 71.9 81.4 92.1 104.2 117.8
133.3 150.8 170.6 193.1 218.4 247.1 279.6 316.3 357.9 404.9 458.0 518.2 586.3
663.3 750.4 849.0 960.5 1086.7 1229.4 1390.9 1573.6 1780.4 2014.2 2278.8 2578.2
2916.8 3300.0 3733.4 4223.9 8650515.7 17716377112.0 36283388120747.6
74308886359719400.0 152185638608104000000.0
86 1.0 2.0 4.1 8.3 16.9 34.3 38.8 43.9 49.7 56.2 63.6 71.9 81.4 92.1 104.2 117.8
133.3 150.8 170.6 193.1 218.4 247.1 279.6 316.3 357.9 404.9 458.0 518.2 586.3
663.3 750.4 849.0 960.5 1086.7 1229.4 1390.9 1573.6 1780.4 2014.2 2278.8 2578.2
2916.8 3300.0 3733.4 4223.9 9936833.1 23376899749.5 54995332463743.6
129379285756722000.0 304371277216208000000.0
87 1.0 2.0 4.1 8.3 16.9 34.3 38.8 43.9 49.7 56.2 63.6 71.9 81.4 92.1 104.2 117.8
133.3 150.8 170.6 193.1 218.4 247.1 279.6 316.3 357.9 404.9 458.0 518.2 586.3
663.3 750.4 849.0 960.5 1086.7 1229.4 1390.9 1573.6 1780.4 2014.2 2278.8 2578.2
2916.8 3300.0 3733.4 4223.9 11414423.9 30846004148.8 83357336496043.3
225262420188730000.0 608742554432415000000.0
88 1.0 2.0 4.1 8.3 16.9 34.3 38.8 43.9 49.7 56.2 63.6 71.9 81.4 92.1 104.2 117.8
133.3 150.8 170.6 193.1 218.4 247.1 279.6 316.3 357.9 404.9 458.0 518.2 586.3
663.3 750.4 849.0 960.5 1086.7 1229.4 1390.9 1573.6 1780.4 2014.2 2278.8 2578.2
2916.8 3300.0 3733.4 4223.9 13111729.9 40701546490.1 126346095867235.0
392204653569494000.0 1217485108864830000000.0
89 1.0 2.0 4.1 8.3 16.9 34.3 38.8 43.9 49.7 56.2 63.6 71.9 81.4 92.1 104.2 117.8
133.3 150.8 170.6 193.1 218.4 247.1 279.6 316.3 357.9 404.9 458.0 518.2 586.3
663.3 750.4 849.0 960.5 1086.7 1229.4 1390.9 1573.6 1780.4 2014.2 2278.8 2578.2
2916.8 3300.0 3733.4 4223.9 15061422.6 53706012574.4 191504870619879.0
682867964184568000.0 2434970217729660000000.0
90 1.0 2.0 4.1 8.3 16.9 34.3 38.8 43.9 49.7 56.2 63.6 71.9 81.4 92.1 104.2 117.8
133.3 150.8 170.6 193.1 218.4 247.1 279.6 316.3 357.9 404.9 458.0 518.2 586.3
663.3 750.4 849.0 960.5 1086.7 1229.4 1390.9 1573.6 1780.4 2014.2 2278.8 2578.2
2916.8 3300.0 3733.4 4223.9 17301031.4 70865508448.0 290267104965980.0
1188942181755510000.0 4869940435459320000000.0

0.00 0.05 0.10 0.15 0.20 0.25 0.30 0.35 0.40 0.45 0.50 0.55 0.60 0.65 0.70 0.75 0.80
0.85 0.90 0.95 1.00
```

No arquivo de saída do programa, são impressos novamente todos os dados de leitura, para que o arquivo possa depois ser analisado sem a presença de seu respectivo arquivo de entrada. Outro motivo é a verificação se os dados foram lidos de maneira correta. Além disso, são impressos todas as soluções ótimas $f_t(W_{t,j})$ em cada estado do modelo t para cada ponto inicial j juntamente com seus respectivos valores ótimos de consumo e alocação em ações. Apresentamos a seguir estes dados, resultantes da otimização do **Indivíduo A**, organizados em tabelas, para facilitar a visualização.

Apêndice VI – Estrutura e exemplo dos arquivos de entrada e saída de dados do otimizador

Idade: 90 anos						Idade: 89 anos						Idade: 88 anos						Idade: 87 anos					
j	W_{ij}	f_i	W_{ij}	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima	W_{ij}	f_i	W_{ij}	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima	W_{ij}	f_i	W_{ij}	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima	W_{ij}	f_i	W_{ij}	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima			
0	1	-6.961	1,0	-	-	1	-3.660	5,5	10%	-	1	-4.082	5,5	25%	-	1	-4.431	5,5	25%	-			
1	2	-4.907	2,1	-	-	2,1	-3.332	6,6	10%	-	2,1	-3.753	6,6	25%	-	2,1	-4.102	6,6	25%	-			
2	5	-3.223	4,5	-	-	4,5	-2.813	9,0	10%	-	4,5	-3.234	9,0	25%	-	4,5	-3.583	9,0	25%	-			
3	10	-1.906	9,5	-	-	9,5	-2.151	14,0	10%	-	9,5	-2.573	14,0	25%	-	9,5	-2.922	14,0	25%	-			
4	20	-0.845	20,2	-	-	20,2	-1.408	23,3	10%	-	20,2	-1.841	24,0	25%	-	20,2	-2.189	24,0	25%	-			
5	43	0,000	42,9	-	-	42,9	-0.555	34,4	50%	-	42,9	-0.968	34,4	35%	-	42,9	-1.304	33,7	40%	-			
6	48	0,114	48,2	-	-	48,2	-0.397	36,7	35%	-	48,2	-0.811	36,7	40%	-	48,2	-1.141	35,9	40%	-			
7	54	0,228	54,3	-	-	54,3	-0.231	39,2	20%	-	54,3	-0.644	39,2	45%	-	54,3	-0.968	38,4	40%	-			
8	61	0,334	61,0	-	-	61	-0.067	43,7	15%	-	61	-0.474	40,9	45%	-	61	-0.793	40,9	40%	-			
9	69	0,439	68,7	-	-	68,7	0,099	47,8	10%	-	68,7	-0.292	43,5	45%	-	68,7	-0.606	42,5	40%	-			
10	77	0,539	77,2	-	-	77,2	0,256	54,5	10%	-	77,2	-0.107	46,2	30%	-	77,2	-0.417	46,2	40%	-			
11	87	0,636	86,9	-	-	86,9	0,412	59,6	20%	-	86,9	0,095	50,4	25%	-	86,9	-0.217	49,1	40%	-			
12	98	0,729	97,7	-	-	97,7	0,564	66,7	20%	-	97,7	0,276	54,8	20%	-	97,7	-0.012	51,9	40%	-			
13	110	0,820	109,9	-	-	109,9	0,716	73,0	20%	-	109,9	0,467	61,4	20%	-	109,9	0,200	56,4	35%	-			
14	124	0,907	123,7	-	-	123,7	0,866	81,8	20%	-	123,7	0,656	66,9	25%	-	123,7	0,416	61,4	30%	-			
15	139	0,991	139,1	-	-	139,1	1,013	89,5	20%	-	139,1	0,843	75,0	25%	-	139,1	0,632	66,7	25%	-			
16	157	1,073	156,5	-	-	156,5	1,157	100,4	20%	-	156,5	1,029	81,7	25%	-	156,5	0,849	72,4	25%	-			
17	176	1,151	176,0	-	-	176	1,298	109,9	20%	-	176	1,213	89,0	25%	-	176	1,064	81,1	25%	-			
18	198	1,227	198,0	-	-	198	1,437	123,3	20%	-	198	1,397	99,8	25%	-	198	1,279	88,1	25%	-			
19	223	1,300	222,8	-	-	222,8	1,573	138,4	20%	-	222,8	1,577	108,8	25%	-	222,8	1,493	95,6	25%	-			
20	251	1,370	250,6	-	-	250,6	1,706	155,3	20%	-	250,6	1,755	122,1	25%	-	250,6	1,704	107,3	25%	-			
21	282	1,438	281,9	-	-	281,9	1,835	170,2	20%	-	281,9	1,930	137,0	25%	-	281,9	1,914	116,3	25%	-			
22	317	1,504	317,1	-	-	317,1	1,961	191,1	20%	-	317,1	2,102	149,2	25%	-	317,1	2,121	130,6	25%	-			
23	357	1,568	356,7	-	-	356,7	2,083	214,7	20%	-	356,7	2,270	167,6	20%	-	356,7	2,325	146,6	25%	-			
24	401	1,629	401,2	-	-	401,2	2,202	241,1	20%	-	401,2	2,434	188,2	20%	-	401,2	2,525	158,8	25%	-			
25	451	1,688	451,4	-	-	451,4	2,318	270,9	20%	-	451,4	2,595	204,9	20%	-	451,4	2,723	178,5	25%	-			
26	508	1,745	507,7	-	-	507,7	2,430	304,4	20%	-	507,7	2,752	230,2	20%	-	507,7	2,916	200,5	25%	-			
27	571	1,800	571,1	-	-	571,1	2,539	333,7	20%	-	571,1	2,905	258,7	20%	-	571,1	3,104	217,0	25%	-			
28	643	1,853	642,5	-	-	642,5	2,645	375,1	20%	-	642,5	3,055	290,7	20%	-	642,5	3,289	243,9	25%	-			
29	723	1,905	722,7	-	-	722,7	2,748	421,6	20%	-	722,7	3,199	326,8	20%	-	722,7	3,469	274,1	20%	-			
30	813	1,954	813,0	-	-	813	2,847	474,0	20%	-	813	3,340	367,3	20%	-	813	3,645	308,1	20%	-			
31	915	2,002	914,6	-	-	914,6	2,943	532,9	20%	-	914,6	3,477	413,0	20%	-	914,6	3,816	346,4	20%	-			
32	1029	2,048	1028,8	-	-	1028,8	3,036	599,1	20%	-	1028,8	3,610	449,3	20%	-	1028,8	3,993	389,4	20%	-			
33	1157	2,093	1157,3	-	-	1157,3	3,127	673,5	20%	-	1157,3	3,739	505,2	20%	-	1157,3	4,144	421,0	20%	-			
34	1302	2,136	1301,8	-	-	1301,8	3,214	757,3	20%	-	1301,8	3,864	568,0	20%	-	1301,8	4,302	473,4	20%	-			
35	1464	2,177	1464,4	-	-	1464,4	3,298	851,6	20%	-	1464,4	3,995	638,7	20%	-	1464,4	4,454	532,3	20%	-			
36	1647	2,218	1647,4	-	-	1647,4	3,380	957,7	20%	-	1647,4	4,102	718,3	20%	-	1647,4	4,602	598,6	20%	-			
37	1853	2,256	1853,1	-	-	1853,1	3,459	1076,9	20%	-	1853,1	4,216	807,7	20%	-	1853,1	4,746	673,1	20%	-			
38	2095	2,294	2094,6	-	-	2094,6	3,535	1211,1	20%	-	2094,6	4,326	908,4	20%	-	2094,6	4,895	757,0	20%	-			
39	2345	2,330	2344,9	-	-	2344,9	3,609	1362,0	20%	-	2344,9	4,432	1021,5	20%	-	2344,9	5,020	851,3	20%	-			
40	2638	2,365	2637,8	-	-	2637,8	3,680	1531,8	20%	-	2637,8	4,535	1148,9	20%	-	2637,8	5,150	957,4	20%	-			
41	2967	2,398	2967,3	-	-	2967,3	3,749	1722,8	20%	-	2967,3	4,635	1292,1	20%	-	2967,3	5,277	1076,8	20%	-			
42	3338	2,431	3337,9	-	-	3337,9	3,815	1937,7	20%	-	3337,9	4,731	1453,3	20%	-	3337,9	5,399	1211,1	20%	-			
43	3755	2,462	3754,9	-	-	3754,9	3,879	2179,4	20%	-	3754,9	4,824	1634,6	20%	-	3754,9	5,517	1362,2	20%	-			
44	4224	2,492	4223,9	-	-	4223,9	3,942	2451,3	20%	-	4223,9	4,914	1838,5	20%	-	4223,9	5,632	1532,1	20%	-			
45	1,7E+07	3,264	1,7E+07	-	-	1,6E+07	5,400	1,3E+06	25%	-	1,3E+07	6,940	7,6E+05	20%	-	1,1E+07	8,127	5,0E+05	20%	-			
46	7,1E+10	3,328	7,1E+10	-	-	5,4E+10	5,649	5,4E+09	60%	-	4,1E+10	7,367	1,8E+09	45%	-	3,1E+10	8,718	8,9E+08	40%	-			
47	2,9E+14	3,333	2,9E+14	-	-	1,9E+14	5,674	2,2E+13	100%	-	1,3E+14	7,432	5,5E+12	80%	-	8,3E+13	8,833	1,2E+12	70%	-			
48	1,2E+18	3,333	1,2E+18	-	-	6,8E+17	5,677	6,8E+16	100%	-	3,9E+17	7,440	1,7E+16	100%	-	2,3E+17	8,652	3,3E+15	100%	-			
49	4,9E+21	3,333	4,9E+21	-	-	2,4E+21	5,677	3,5E+20	100%	-	1,2E+21	7,441	5,3E+19	100%	-	6,1E+20	8,655	6,8E+18	100%	-			

Idade: 86 anos						Idade: 85 anos						Idade: 84 anos						Idade: 83 anos					
j	W_{ij}	f_i	$f_i (W_{ij})$	Consumo	Aloc. Ótima	W_{ij}	f_i	$f_i (W_{ij})$	Consumo	Aloc. Ótima	W_{ij}	f_i	$f_i (W_{ij})$	Consumo	Aloc. Ótima	W_{ij}	f_i	$f_i (W_{ij})$	Consumo	Aloc. Ótima			
0	1	-4.731	5,5	25%		1	-5.001	5,5	25%		1	-5.252	5,5	25%		1	-5.493	5,5	25%				
1	2	-4.403	6,6	25%		2,1	-4.672	6,6	25%		2,1	-4.923	6,6	25%		2,1	-5.164	6,6	25%				
2	5	-3.884	9,0	25%		4,5	-4.153	9,0	25%		4,5	-4.404	9,0	25%		4,5	-4.645	9,0	25%				
3	10	-3.222	14,0	25%		9,5	-3.492	14,0	25%		9,5	-3.743	14,0	25%		9,5	-3.984	14,0	25%				
4	20	-2.489	23,6	25%		20,2	-2.757	23,6	25%		20,2	-3.007	23,3	25%		20,2	-3.246	23,3	25%				
5	43	-1.589	33,0	45%	42	42,9	-1.842	32,3	45%	42,9	-2.077	32,3	45%	42,9	-2.300	31,6	50%	42,9	-2.523	30,9	50%		
6	48	-1.423	35,2	45%	48	48,2	-1.672	34,4	45%	48,2	-1.902	33,6	45%	48,2	-2.121	32,9	50%	48,2	-2.340	32,2	50%		
7	54	-1.245	37,5	45%	54	54,3	-1.489	36,7	45%	54,3	-1.714	35,8	45%	54,3	-1.928	35,0	50%	54,3	-2.147	34,3	50%		
8	61	-1.063	39,0	45%	61	61	-1.302	38,0	45%	61	-1.522	37,1	45%	61	-1.730	37,1	45%	61	-1.937	36,4	45%		
9	69	-0.870	41,4	40%	68	68,7	-1.103	40,4	45%	68,7	-1.316	39,3	45%	68,7	-1.518	39,3	45%	68,7	-1.725	38,6	45%		
10	77	-0.673	43,9	40%	77	77,2	-0.899	42,7	40%	77,2	-1.105	42,7	45%	77,2	-1.300	41,5	45%	77,2	-1.495	40,8	45%		
11	87	-0.466	47,7	40%	86	86,9	-0.684	45,4	40%	86,9	-0.882	45,1	40%	86,9	-1.069	43,8	45%	86,9	-1.264	43,1	45%		
12	98	-0.254	50,4	40%	97	97,7	-0.463	48,9	40%	97,7	-0.653	47,5	40%	97,7	-0.832	46,0	40%	97,7	-1.019	44,5	40%		
13	110	-0.034	54,8	40%	109	109,9	-0.234	53,1	40%	109,9	-0.415	51,5	40%	109,9	-0.595	49,8	40%	109,9	-0.782	48,1	40%		
14	124	0,194	57,7	35%	123	123,7	0,003	55,8	35%	123,7	-0.168	53,9	35%	123,7	-0.327	52,1	40%	123,7	-0.486	50,4	35%		
15	139	0,426	62,5	35%	139	139,1	0,245	60,4	35%	139,1	0,034	58,3	35%	139,1	-0.064	56,3	35%	139,1	-0.223	54,6	35%		
16	157	0,677	68,3	35%	156	156,5	0,463	63,4	35%	156,5	0,344	63,1	35%	156,5	0,130	60,9	35%	156,5	-0,081	58,8	35%		
17	176	0,902	73,3	30%	176	176,7	0,747	70,7	35%	176,7	0,609	68,1	35%	176,7	0,484	65,5	35%	176,7	0,359	63,8	35%		
18	198	1,142	79,3	25%	198	198,1	1,005	76,4	30%	198,1	0,880	73,4	35%	198,1	0,768	70,5	35%	198,1	0,643	67,6	35%		
19	223	1,382	89,0	25%	222	222,8	1,266	82,4	30%	222,8	1,156	79,1	30%	222,8	1,058	75,8	30%	222,8	0,950	72,5	30%		
20	251	1,620	96,2	25%	250	250,6	1,526	88,8	25%	250,6	1,435	85,1	30%	250,6	1,351	81,4	30%	250,6	1,267	78,1	30%		
21	282	1,857	108,0	25%	281	281,9	1,787	99,7	25%	281,9	1,714	95,5	30%	281,9	1,647	91,4	30%	281,9	1,573	87,3	30%		
22	317	2,092	116,6	25%	317,1	317,1	2,046	107,3	25%	317,1	1,995	102,6	25%	317,1	1,946	97,9	30%	317,1	1,897	93,2	30%		
23	357	2,325	130,9	25%	356,7	356,7	2,303	120,5	25%	356,7	2,274	115,2	25%	356,7	2,244	104,8	25%	356,7	2,214	99,5	25%		
24	401	2,555	141,2	25%	401,2	401,2	2,558	135,3	25%	401,2	2,521	123,5	25%	401,2	2,542	117,7	25%	401,2	2,505	112,0	25%		
25	451	2,782	158,6	25%	451,4	451,4	2,811	145,4	25%	451,4	2,827	138,9	25%	451,4	2,839	132,2	25%	451,4	2,851	125,5	25%		
26	503	3,008	178,7	25%	503,3	503,3	3,059	163,6	25%	503,3	3,069	157,7	25%	503,3	3,080	147,8	25%	503,3	3,091	141,0	25%		
27	571	3,224	200,3	25%	571,1	571,1	3,304	183,6	25%	571,1	3,337	186,9	25%	571,1	3,423	168,6	25%	571,1	3,456	162,9	25%		
28	643	3,439	215,7	25%	642,5	642,5	3,546	197,5	25%	642,5	3,632	187,6	25%	642,5	3,710	178,2	25%	642,5	3,788	172,5	25%		
29	723	3,649	242,5	25%	722,7	722,7	3,782	221,4	25%	722,7	3,892	210,9	25%	722,7	3,992	189,8	25%	722,7	4,092	184,1	25%		
30	813	3,855	272,6	25%	813	813	4,014	248,9	25%	813	4,148	225,2	25%	813	4,270	213,3	25%	813	4,392	206,4	25%		
31	915	4,055	306,4	20%	914,6	914,6	4,240	279,8	25%	914,6	4,398	253,2	25%	914,6	4,542	239,8	25%	914,6	4,686	230,4	25%		
32	1029	4,251	344,5	20%	1028,8	1028,8	4,451	299,6	20%	1028,8	4,643	284,6	25%	1028,8	4,809	269,6	25%	1028,8	4,975	260,2	25%		
33	1157	4,441	375,0	20%	1157,3	1157,3	4,677	336,8	20%	1157,3	4,882	320,0	25%	1157,3	5,071	303,2	25%	1157,3	5,260	293,9	25%		
34	1302	4,626	416,6	20%	1301,8	1301,8	4,888	374,7	20%	1301,8	5,115	359,8	25%	1301,8	5,316	321,9	20%	1301,8	5,517	304,0	20%		
35	1458	4,806	458,4	20%	1457,4	1457,4	5,093	416,6	20%	1457,4	5,345	394,5	25%	1457,4	5,545	362,0	20%	1457,4	5,746	342,1	20%		
36	1637	4,982	500,2	20%	1647	1647,5	5,232	479,7	20%	1647,4	5,555	431,1	25%	1647,4	5,756	401,7	20%	1647,4	5,957	447,1	20%		
37	1853	5,151	552,2	20%	1853,1	1853,1	5,486	538,5	20%	1853,1	5,780	484,7	20%	1853,1	6,054	457,7	20%	1853,1	6,322	428,3	20%		
38	2095	5,316	606,2	20%	2084,6	2084,6	5,674	605,6	20%	2084,6	5,980	545,1	20%	2084,6	6,284	514,8	20%	2084,6	6,582	483,0	20%		
39	2345	5,476	749,2	20%	2344,9	2344,9	5,856	681,1	20%	2344,9	6,194	613,0	20%	2344,9	6,508	578,9	20%	2344,9	6,812	543,8	20%		
40	2638	5,631	842,5	20%	2637,8	2637,8	6,033	766,0	20%	2637,8	6,391	689,4	20%	2637,8	6,725	651,1	20%	2637,8	7,049	618,4	20%		
41	2967	5,781	947,6	20%	2967,3	2967,3	6,205	861,9	20%	2967,3	6,583	775,3	20%	2967,3	6,936	732,3	20%	2967,3	7,289	699,4	20%		
42	3338	5,927	1065,8	20%	3337,9	3337,9	6,371	968,9	20%	3337,9	6,769	872,0	20%	3337,9	7,140	823,6	20%	3337,9	7,511	780,7	20%		
43	3755	6,067	1198,7	20%	3754,9	3754,9	6,532	1089,7	20%	3754,9	6,949	980,8	20%	3754,9	7,328	926,3	20%	3754,9	7,699	872,9	20%		
44	4224	6,203	1348,3	20%	4223,9	4223,9	6,687	1225,8	20%	4223,9	7,122	1103,1	25%	4223,9	7,539	1041,9	25%	4223,9	7,956	984,0	25%		
45	9.0E+06	9,006	2.9E+06	15%	9.0E+06	9.0E+06	9,006	2.9E+06	15%	9.0E+06	9,006	2.9E+06	15%	9.0E+06	9,006	2.9E+06	15%	9.0E+06	9,006	2.9E+06	15%		
46	2.3E+10	9,838	8.0E+08	10%	1.8E+10	1.8E+10	10,809	2.5E+08	40%	1.8E+10	11,695	1.5E+08	40%	1.8E+10	12,502	1.5E+08	40%	1.8E+10	13,309	1.5E+08	40%		
47	5.5E+13	10,039	5.0E+11	70%	3.6E+13	3.6E+13	11,038	5.3E+11	70%	3.6E+13	11,973	3.5E+11	70%	1.6E+13	12,852	2.3E+11	70%	1.6E+13	13,729	2.3E+11	70%		
48	1.3E+17	10,045	1.9E+15	100%	7.4E+16	7.4E+16	11,095	1.1E+15	100%	7.4E+16	12,056	6.2E+14	100%	2.5E+16	12,962	3.6E+14	100%	2.5E+16	13,869	3.6E+14	100%		
49	3.0E+20	10,052	4.4E+18	100%	1.5E+20	1.5E+20	11,099	1.2E+18	100%	7.6E+19	12,079	1.1E+18	100%	3.8E+19	12,997	5.5E+17	100%	3.8E+19	13,914	5.5E+17	100%		

Apêndice VI – Estrutura e exemplo dos arquivos de entrada e saída de dados do otimizador

Idade: 83 anos						Idade: 82 anos						Idade: 81 anos						Idade: 80 anos					
j	W_{ij}	$f_i(W_{ij})$	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima		W_{ij}	$f_i(W_{ij})$	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima			W_{ij}	$f_i(W_{ij})$	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima			W_{ij}	$f_i(W_{ij})$	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima		
0	1	-5,493	5,5	25%		1	-5,728	5,5	25%			1	-5,968	5,5	25%			1	-6,184	5,5	25%		
1	2	-5,164	6,6	25%		2,1	-5,400	6,6	25%			2,1	-5,630	6,6	25%			2,1	-5,866	6,6	25%		
2	5	-4,645	9,0	25%		4,5	-4,880	9,0	25%			4,5	-5,110	9,0	25%			4,5	-5,337	9,0	25%		
3	10	-3,984	14,0	25%		9,5	-4,219	14,0	25%			9,5	-4,449	14,0	25%			9,5	-4,676	14,0	25%		
4	20	-3,246	23,3	25%		20,2	-3,480	22,9	30%			20,2	-3,708	22,9	30%			20,2	-3,933	22,9	30%		
5	43	-2,300	31,6	50%		42,9	-2,518	30,9	50%			42,9	-2,731	30,3	55%			42,9	-2,940	29,6	55%		
6	48	-2,121	32,9	50%		48,2	-2,334	32,1	50%			48,2	-2,543	32,1	50%			48,2	-2,748	31,4	55%		
7	54	-1,928	35,0	50%		54,3	-2,136	34,1	50%			54,3	-2,339	33,3	50%			54,3	-2,539	32,4	50%		
8	61	-1,730	37,1	45%		61	-1,932	36,1	50%			61	-2,129	35,2	50%			61	-2,324	34,2	50%		
9	69	-1,518	39,3	45%		68,7	-1,713	38,3	45%			68,7	-1,904	37,2	50%			68,7	-2,092	36,1	50%		
10	77	-1,300	41,5	45%		77,2	-1,488	40,3	45%			77,2	-1,672	39,1	45%			77,2	-1,853	37,9	45%		
11	87	-1,069	43,8	45%		86,9	-1,250	42,4	45%			86,9	-1,426	41,1	45%			86,9	-1,599	39,8	45%		
12	98	-0,832	46,0	40%		97,7	-1,004	44,5	40%			97,7	-1,171	44,5	45%			97,7	-1,336	43,0	45%		
13	110	-0,585	49,8	40%		109,9	-0,747	48,1	40%			109,9	-0,905	46,5	40%			109,9	-1,060	44,8	40%		
14	124	-0,327	52,1	40%		123,7	-0,480	50,2	40%			123,7	-0,627	50,2	40%			123,7	-0,772	48,4	40%		
15	139	-0,064	56,3	35%		139,1	-0,206	54,2	40%			139,1	-0,343	52,1	40%			139,1	-0,477	52,1	40%		
16	157	0,207	60,7	35%		156,5	0,078	58,4	35%			156,5	-0,048	56,1	35%			156,5	-0,170	56,1	35%		
17	176	0,484	65,5	35%		176	0,367	62,8	35%			176	0,254	60,2	35%			176	0,144	60,2	35%		
18	198	0,768	70,5	35%		198	0,664	67,6	35%			198	0,565	64,6	35%			198	0,468	64,6	35%		
19	223	1,058	75,8	30%		222,8	0,968	72,5	35%			222,8	0,882	69,2	35%			222,8	0,799	69,2	35%		
20	251	1,351	81,4	30%		250,6	1,275	77,7	30%			250,6	1,204	77,7	30%			250,6	1,135	74,0	30%		
21	282	1,647	91,4	30%		281,9	1,587	87,2	30%			281,9	1,531	83,1	30%			281,9	1,477	78,9	30%		
22	317	1,946	97,9	30%		317,1	1,901	93,3	30%			317,1	1,861	88,6	30%			317,1	1,823	88,6	30%		
23	357	2,244	104,8	25%		356,7	2,217	99,5	30%			356,7	2,194	99,5	30%			356,7	2,173	94,3	25%		
24	401	2,542	117,7	25%		401,2	2,534	111,8	25%			401,2	2,528	105,9	30%			401,2	2,523	105,9	30%		
25	451	2,839	132,2	25%		451,4	2,851	125,6	25%			451,4	2,863	119,0	25%			451,4	2,876	112,4	25%		
26	508	3,132	141,1	25%		507,7	3,165	133,7	25%			507,7	3,196	126,3	25%			507,7	3,228	126,3	25%		
27	571	3,423	158,6	25%		571,1	3,476	150,2	25%			571,1	3,528	141,9	25%			571,1	3,578	133,5	25%		
28	643	3,710	178,2	25%		642,5	3,784	168,9	25%			642,5	3,856	159,5	25%			642,5	3,926	150,1	25%		
29	723	3,992	199,8	25%		722,7	4,088	179,2	25%			722,7	4,180	168,7	25%			722,7	4,270	168,7	25%		
30	813	4,270	213,3	25%		813	4,387	201,5	25%			813	4,500	189,6	25%			813	4,610	177,8	25%		
31	915	4,542	239,8	25%		914,6	4,681	226,5	25%			914,6	4,815	213,2	25%			914,6	4,945	199,9	25%		
32	1029	4,809	269,6	25%		1028,8	4,970	254,7	25%			1028,8	5,124	239,7	25%			1028,8	5,274	224,7	25%		
33	1157	5,071	303,2	25%		1157,3	5,252	286,3	25%			1157,3	5,426	269,5	25%			1157,3	5,597	252,6	25%		
34	1302	5,326	321,9	20%		1301,8	5,528	303,0	25%			1301,8	5,722	303,0	25%			1301,8	5,913	284,1	25%		
35	1464	5,576	362,0	20%		1464,4	5,780	340,7	25%			1464,4	6,013	319,4	25%			1464,4	6,222	319,4	25%		
36	1647	5,818	407,1	20%		1647,4	6,062	383,1	20%			1647,4	6,296	359,2	20%			1647,4	6,524	335,2	25%		
37	1853	6,054	457,7	20%		1853,1	6,318	430,8	20%			1853,1	6,572	403,9	20%			1853,1	6,820	377,0	20%		
38	2095	6,284	514,8	20%		2084,6	6,588	484,5	20%			2084,6	6,841	454,2	20%			2084,6	7,108	424,0	20%		
39	2345	6,508	578,9	20%		2344,9	6,811	544,9	20%			2344,9	7,103	510,8	20%			2344,9	7,388	476,8	20%		
40	2638	6,725	651,1	20%		2637,8	7,047	612,8	20%			2637,8	7,358	574,5	20%			2637,8	7,661	536,2	20%		
41	2967	6,936	732,3	20%		2967,3	7,276	689,2	20%			2967,3	7,605	646,1	20%			2967,3	7,926	603,1	20%		
42	3338	7,140	823,6	20%		3337,9	7,499	775,1	20%			3337,9	7,845	726,7	20%			3337,9	8,183	678,2	20%		
43	3755	7,338	926,3	20%		3754,9	7,714	871,8	20%			3754,9	8,077	817,3	20%			3754,9	8,432	762,9	20%		
44	4224	7,529	1041,9	25%		4223,9	7,922	980,6	20%			4223,9	8,301	919,3	20%			4223,9	8,672	868,0	20%		
45	6,6E+06	11,648	1,9E+05	15%		5,7E+06	11,997	1,7E+05	15%			5,0E+06	12,612	1,4E+05	15%			4,3E+06	13,201	1,3E+05	15%		
46	1,0E+10	12,502	1,5E+08	40%		7,7E+09	13,282	1,1E+08	40%			5,8E+09	14,025	8,5E+07	40%			4,4E+09	14,741	6,4E+07	40%		
47	1,6E+13	12,852	2,3E+11	70%		1,0E+13	13,886	1,5E+11	70%			6,9E+12	14,503	1,0E+11	70%			4,6E+12	15,287	6,6E+10	70%		
48	2,5E+16	12,862	3,6E+14	100%		1,4E+16	13,836	2,0E+14	100%			8,1E+15	14,677	1,2E+14	100%			4,6E+15	15,496	6,7E+13	100%		
49	3,8E+19	12,997	5,5E+17	100%		1,9E+19	13,885	2,8E+17	100%			9,5E+18	14,743	1,4E+17	100%			4,8E+18	15,580	6,9E+16	100%		

Idade: 79 anos					Idade: 78 anos					Idade: 77 anos					Idade: 76 anos				
j	W_{ij}	f_i	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima	W_{ij}	f_i	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima	W_{ij}	f_i	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima	W_{ij}	f_i	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima			
0	1	-6.412	5,5	25%	1	-6.632	5,5	25%	1	-6.854	5,5	25%	1	-7.075	5,5	25%			
1	2	-6.083	6,6	25%	2,1	-6.304	6,6	25%	2,1	-6.525	6,6	25%	2,1	-6.747	6,6	25%			
2	5	-5.564	9,0	25%	4,5	-5.785	9,0	25%	4,5	-6.006	9,0	25%	4,5	-6.227	9,0	25%			
3	10	-4.903	14,0	25%	9,5	-5.123	14,0	25%	9,5	-5.345	14,0	25%	9,5	-5.566	14,0	25%			
4	20	-4.159	22,6	30%	20,2	-4.378	22,6	30%	20,2	-4.599	22,6	30%	20,2	-4.818	22,2	35%			
5	43	-3.151	29,6	60%	42,9	-3.356	28,9	60%	42,9	-3.561	28,2	60%	42,9	-3.766	28,2	65%			
6	48	-2.954	30,6	55%	48,2	-3.155	29,8	55%	48,2	-3.366	29,8	60%	48,2	-3.567	29,1	60%			
7	54	-2.740	32,4	55%	54,3	-2.936	31,6	55%	54,3	-3.132	30,7	55%	54,3	-3.328	30,7	60%			
8	61	-2.519	33,3	50%	61	-2.709	33,3	55%	61	-2.900	32,3	55%	61	-3.091	31,4	55%			
9	69	-2.281	35,1	50%	68,7	-2.465	35,1	50%	68,7	-2.649	34,0	50%	68,7	-2.834	32,9	55%			
10	77	-2.034	36,8	50%	77,2	-2.212	36,8	50%	77,2	-2.390	35,6	50%	77,2	-2.567	34,4	50%			
11	87	-1.772	39,8	45%	86,9	-1.942	38,5	45%	86,9	-2.112	37,1	50%	86,9	-2.282	37,1	50%			
12	98	-1.500	41,5	45%	97,7	-1.662	40,1	45%	97,7	-1.823	40,1	45%	97,7	-1.995	38,6	45%			
13	110	-1.215	44,8	45%	109,9	-1.367	43,2	45%	109,9	-1.520	41,5	45%	109,9	-1.673	41,5	45%			
14	124	-0.917	46,5	40%	123,7	-1.059	46,5	40%	123,7	-1.202	44,7	40%	123,7	-1.344	42,8	40%			
15	139	-0.610	50,0	40%	138,9	-0.742	47,4	40%	138,9	-0.874	47,4	40%	138,9	-0.996	45,5	40%			
16	157	-0.292	53,7	40%	156,5	-0.412	51,4	40%	156,5	-0.532	51,4	40%	156,5	-0.652	49,1	40%			
17	176	0.035	57,6	35%	176	-0.072	55,0	35%	176	-0.180	55,0	35%	176	-0.288	52,4	40%			
18	198	0.372	61,7	35%	198	0.277	58,8	35%	198	0.183	58,8	35%	198	0.089	55,8	35%			
19	223	0.718	66,0	35%	222,8	0.636	62,7	35%	222,8	0.556	62,7	35%	222,8	0.476	59,4	35%			
20	251	1.069	70,3	30%	250,6	1.002	70,3	35%	250,6	0.936	66,3	35%	250,6	0.870	66,3	35%			
21	282	1.426	78,9	30%	281,9	1.375	74,8	30%	281,9	1.324	70,6	30%	281,9	1.274	70,6	30%			
22	317	1.789	84,0	30%	317,1	1.752	79,3	30%	317,1	1.718	79,3	30%	317,1	1.683	74,7	30%			
23	357	2.154	89,1	30%	356,7	2.135	89,1	30%	356,7	2.116	83,8	30%	356,7	2.098	83,8	30%			
24	401	2.522	100,0	30%	401,2	2.519	94,2	30%	401,2	2.518	94,2	30%	401,2	2.517	89,3	30%			
25	456	2.892	108,8	25%	456,4	2.907	105,4	25%	456,4	2.923	103,3	25%	456,4	2.939	101,3	25%			
26	508	3.263	118,8	25%	507,7	3.293	111,4	25%	507,7	3.328	111,4	25%	507,7	3.361	104,0	30%			
27	571	3.631	133,5	25%	571,1	3.681	125,2	25%	571,1	3.732	125,2	25%	571,1	3.785	116,9	25%			
28	643	3.999	140,7	25%	642,5	4.067	140,7	25%	642,5	4.137	131,4	25%	642,5	4.207	131,4	25%			
29	723	4.363	158,2	25%	722,7	4.449	147,6	25%	722,7	4.538	147,6	25%	722,7	4.627	137,1	25%			
30	813	4.722	177,8	25%	813	4.828	165,9	25%	813	4.936	165,9	25%	813	5.044	154,1	25%			
31	915	5.077	199,9	25%	914,6	5.202	186,6	25%	914,6	5.329	173,2	25%	914,6	5.456	173,2	25%			
32	1029	5.426	209,7	25%	1028,8	5.570	209,7	25%	1028,8	5.716	194,8	25%	1028,8	5.862	194,8	25%			
33	1157	5.769	238,6	25%	1157,3	5.932	238,6	25%	1157,3	6.098	219,0	25%	1157,3	6.263	219,0	25%			
34	1302	6.105	265,1	25%	1301,8	6.287	246,2	25%	1301,8	6.472	246,2	25%	1301,8	6.656	227,3	25%			
35	1464	6.434	298,1	25%	1464,4	6.636	276,8	25%	1464,4	6.828	276,8	25%	1464,4	7.019	265,4	25%			
36	1637	6.755	336,2	25%	1647	6.976	311,5	25%	1647,4	7.198	311,5	25%	1647,4	7.420	287,7	25%			
37	1853	7.069	377,2	25%	1853,1	7.308	350,1	25%	1853,1	7.549	350,1	25%	1853,1	7.789	323,1	25%			
38	2085	7.376	424,0	20%	2084,6	7.633	393,7	20%	2084,6	7.891	363,4	20%	2084,6	8.150	363,4	20%			
39	2345	7.674	476,8	20%	2344,9	7.949	442,7	20%	2344,9	8.225	408,7	20%	2344,9	8.502	408,7	20%			
40	2638	7.965	497,9	20%	2637,8	8.257	497,9	20%	2637,8	8.551	459,6	20%	2637,8	8.845	459,6	20%			
41	2967	8.248	560,0	20%	2967,3	8.557	560,0	20%	2967,3	8.868	516,9	20%	2967,3	9.178	516,9	20%			
42	3338	8.523	628,8	20%	3337,9	8.848	628,8	20%	3337,9	9.176	581,4	20%	3337,9	9.503	581,4	20%			
43	3755	8.788	708,4	20%	3754,9	9.129	708,4	20%	3754,9	9.472	653,9	20%	3754,9	9.815	653,9	20%			
44	4224	9.044	786,7	20%	4223,9	9.401	786,7	20%	4223,9	9.759	735,6	15%	4223,9	10.117	735,6	15%			
45	3.0E+08	1.1E+08	15%	3.2E+08	1.3E+08	15%	3.4E+08	1.5E+08	15%	3.6E+08	1.7E+08	15%	3.8E+08	1.9E+08	15%				
46	3.0E+09	1.5E+07	4.9E+07	100%	2.5E+09	1.6E+16	3.7E+07	40%	1.9E+09	16.775	2.9E+07	40%	1.5E+09	17.421	2.1E+07	40%			
47	3.0E+12	1.6E+03	4.3E+10	70%	2.0E+12	1.6E+01	2.9E+10	70%	1.3E+12	17.533	1.9E+10	70%	8.8E+11	19.254	1.2E+10	70%			
48	2.7E+15	16.309	3.9E+13	100%	1.5E+15	17.088	2.2E+13	100%	8.8E+14	17.862	1.3E+13	100%	5.1E+14	18.626	7.3E+12	100%			
49	2.4E+18	16.404	4.3E+16	100%	1.2E+18	17.019	1.7E+16	100%	5.9E+17	18.013	8.6E+15	100%	3.0E+17	18.803	4.3E+15	100%			

Apêndice VI – Estrutura e exemplo dos arquivos de entrada e saída de dados do otimizador

Idade: 76 anos					Idade: 75 anos					Idade: 74 anos					Idade: 73 anos				
j	W_{ij}	$f_i(W_{ij})$	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima	W_{ij}	$f_i(W_{ij})$	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima	W_{ij}	$f_i(W_{ij})$	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima	W_{ij}	$f_i(W_{ij})$	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima			
0	1	-7.075	5,5	25%	1	-7.299	5,5	25%	1	-7.523	5,5	30%	1	-7.750	5,5	30%			
1	2	-6.747	6,6	25%	2,1	-6.971	6,6	25%	2,1	-7.195	6,6	30%	2,1	-7.421	6,6	30%			
2	5	-6.227	9,0	25%	4,5	-6.451	9,0	25%	4,5	-6.675	9,0	30%	4,5	-6.902	9,0	30%			
3	10	-5.588	14,0	25%	9,5	-5.790	14,0	25%	9,5	-6.014	14,0	30%	9,5	-6.241	14,0	30%			
4	20	-4.818	22,2	35%	20,2	-5.041	22,2	35%	20,2	-5.263	22,2	35%	20,2	-5.489	21,8	40%			
5	43	-3.766	28,2	65%	42,9	-3.973	27,5	65%	42,9	-4.181	27,5	70%	42,9	-4.390	26,8	70%			
6	48	-3.557	29,1	60%	48,2	-3.760	28,3	60%	48,2	-3.963	28,3	65%	48,2	-4.168	27,5	65%			
7	54	-3.328	30,7	60%	54,3	-3.526	29,9	60%	54,3	-3.724	29,0	60%	54,3	-3.925	29,0	60%			
8	61	-3.091	31,4	55%	61	-3.263	31,4	55%	61	-3.476	30,4	60%	61	-3.671	30,4	60%			
9	69	-2.834	32,9	55%	68,7	-3.020	32,9	55%	68,7	-3.207	31,9	55%	68,7	-3.395	31,9	55%			
10	77	-2.567	34,4	50%	77,2	-2.747	34,4	50%	77,2	-2.926	33,2	55%	77,2	-3.108	33,2	55%			
11	87	-2.282	37,1	50%	86,9	-2.454	35,8	50%	86,9	-2.625	35,8	50%	86,9	-2.799	34,5	50%			
12	98	-1.985	38,6	45%	97,7	-2.148	38,6	45%	97,7	-2.312	37,1	50%	97,7	-2.477	37,1	50%			
13	110	-1.673	41,5	45%	109,9	-1.826	39,9	45%	109,9	-1.981	39,9	45%	109,9	-2.136	38,2	45%			
14	124	-1.344	42,8	40%	123,7	-1.488	42,8	45%	123,7	-1.632	40,9	45%	123,7	-1.777	40,9	45%			
15	139	-1.005	45,9	40%	139,1	-1.138	45,9	40%	139,1	-1.271	43,8	40%	139,1	-1.405	43,8	40%			
16	157	-0.652	49,1	40%	156,5	-0.773	49,1	40%	156,5	-0.894	46,7	40%	156,5	-1.016	46,7	40%			
17	176	-0.288	52,4	40%	176	-0.396	52,4	40%	176	-0.505	49,8	40%	176	-0.614	49,8	40%			
18	198	0.089	55,8	35%	198	-0.006	55,8	35%	198	-0.101	52,9	35%	198	-0.197	52,9	35%			
19	223	0.476	59,4	35%	222,8	0.395	59,4	35%	222,8	0.314	56,1	35%	222,8	0.233	56,1	35%			
20	251	0.870	66,6	35%	250,6	0.805	62,9	35%	250,6	0.739	62,9	35%	250,6	0.673	59,2	35%			
21	282	1.274	70,6	30%	281,9	1.223	66,5	30%	281,9	1.173	66,5	35%	281,9	1.123	66,5	35%			
22	317	1.683	74,7	30%	317,1	1.650	74,7	30%	317,1	1.615	70,0	30%	317,1	1.582	70,0	30%			
23	357	2.098	83,8	30%	356,7	2.081	78,6	30%	356,7	2.064	78,6	30%	356,7	2.047	73,4	30%			
24	401	2.517	88,3	30%	401,2	2.517	88,3	30%	401,2	2.517	82,4	30%	401,2	2.518	82,4	30%			
25	451	2.939	99,2	30%	451,4	2.957	92,6	30%	451,4	2.975	92,6	30%	451,4	2.994	92,6	30%			
26	508	3.361	104,0	30%	507,7	3.398	104,0	30%	507,7	3.433	104,0	30%	507,7	3.472	96,6	30%			
27	571	3.785	116,9	25%	571,1	3.839	116,9	25%	571,1	3.894	108,5	25%	571,1	3.950	108,5	30%			
28	643	4.207	131,4	25%	642,5	4.280	122,0	25%	642,5	4.364	122,0	25%	642,5	4.429	112,6	25%			
29	723	4.627	137,1	25%	722,7	4.719	137,1	25%	722,7	4.811	137,1	25%	722,7	4.906	126,6	25%			
30	813	5.044	154,1	25%	813	5.155	154,1	25%	813	5.266	142,3	25%	813	5.380	142,3	25%			
31	915	5.456	173,2	25%	914,6	5.586	173,2	25%	914,6	5.717	159,9	25%	914,6	5.860	159,9	25%			
32	1029	5.862	194,8	25%	1028,8	6.012	179,8	25%	1028,8	6.162	179,8	25%	1028,8	6.314	179,8	25%			
33	1157	6.263	219,0	25%	1157,3	6.432	202,1	25%	1157,3	6.600	202,1	25%	1157,3	6.772	185,3	25%			
34	1302	6.656	227,3	25%	1301,8	6.844	227,3	25%	1301,8	7.032	227,3	25%	1301,8	7.223	208,3	25%			
35	1464	7.042	255,5	25%	1464,4	7.248	255,5	25%	1464,4	7.455	234,3	25%	1464,4	7.666	234,3	25%			
36	1647	7.420	287,4	25%	1647,4	7.645	287,4	25%	1647,4	7.871	263,4	25%	1647,4	8.101	263,4	25%			
37	1853	7.789	323,1	25%	1853,1	8.033	323,1	25%	1853,1	8.277	296,2	25%	1853,1	8.526	296,2	25%			
38	2095	8.160	363,4	20%	2084,6	8.412	363,4	20%	2084,6	8.675	333,1	25%	2084,6	8.941	333,1	25%			
39	2345	8.502	408,7	20%	2344,9	8.781	374,6	20%	2344,9	9.062	374,6	20%	2344,9	9.347	374,6	20%			
40	2638	8.845	459,6	20%	2637,8	9.142	421,3	20%	2637,8	9.440	421,3	20%	2637,8	9.742	421,3	20%			
41	2967	9.178	516,9	20%	2967,3	9.493	473,8	20%	2967,3	9.809	473,8	20%	2967,3	10.128	473,8	20%			
42	3338	9.503	581,4	20%	3337,9	9.835	532,9	20%	3337,9	10.167	532,9	20%	3337,9	10.503	484,5	20%			
43	3755	9.815	653,9	20%	3754,9	10.162	599,4	25%	3754,9	10.510	599,4	25%	3754,9	10.863	549,4	20%			
44	4224	10.117	735,5	15%	4223,9	10.479	674,2	15%	4223,9	10.842	674,2	15%	4223,9	11.210	674,2	15%			
45	2.5E+06	15.388	7.2E+04	15%	2.2E+06	15.909	6.3E+04	15%	1.9E+06	16.420	5.5E+04	15%	1.6E+06	16.927	4.8E+04	15%			
46	1.5E+09	17.421	2.1E+07	40%	1.1E+09	18.063	1.6E+07	40%	8.4E+08	18.693	1.2E+07	40%	6.4E+08	19.319	9.2E+06	40%			
47	8.6E+11	18.254	1.2E+10	70%	5.7E+11	18.972	8.2E+09	70%	3.7E+11	19.680	5.4E+09	70%	2.5E+11	20.386	3.6E+09	70%			
48	5.1E+14	18.626	7.3E+12	100%	2.9E+14	19.390	4.2E+12	100%	1.7E+14	20.147	2.4E+12	100%	9.6E+13	20.903	1.4E+12	100%			
49	3.0E+17	18.803	4.3E+15	100%	1.5E+17	19.596	2.2E+15	100%	7.4E+16	20.383	1.1E+15	100%	3.7E+16	21.171	5.4E+14	100%			

Idade: 72 anos					Idade: 71 anos					Idade: 70 anos					Idade: 69 anos				
j	W_{ij}	$f_i(W_{ij})$	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima	W_{ij}	$f_i(W_{ij})$	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima	W_{ij}	$f_i(W_{ij})$	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima	W_{ij}	$f_i(W_{ij})$	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima			
0	1	-7.976	5,5	30%	1	-8.198	5,5	30%	1	-8.425	5,5	30%	1	-8.644	5,5	30%			
1	2	-7.648	6,6	30%	2,1	-7.870	6,6	30%	2,1	-8.096	6,6	30%	2,1	-8.316	6,6	30%			
2	5	-7.128	9,0	30%	4,5	-7.351	9,0	30%	4,5	-7.577	9,0	30%	4,5	-7.797	9,0	30%			
3	10	-6.467	14,0	30%	9,5	-6.689	14,0	30%	9,5	-6.916	14,0	30%	9,5	-7.136	14,0	30%			
4	20	-5.714	21,8	40%	20,2	-5.934	21,8	40%	20,2	-6.159	21,5	45%	20,2	-6.378	21,5	45%			
5	43	-4.600	26,1	70%	42,9	-4.806	26,1	70%	42,9	-5.015	25,5	70%	42,9	-5.218	25,5	70%			
6	48	-4.373	27,5	65%	48,2	-4.575	26,8	70%	48,2	-4.779	26,8	70%	48,2	-4.979	26,0	70%			
7	54	-4.125	28,2	60%	54,3	-4.322	28,2	65%	54,3	-4.521	27,3	65%	54,3	-4.716	27,3	65%			
8	61	-3.865	29,5	60%	61	-4.057	29,5	60%	61	-4.251	28,5	60%	61	-4.441	28,5	60%			
9	69	-3.583	30,8	55%	68,7	-3.769	30,8	60%	68,7	-3.956	29,8	60%	68,7	-4.140	29,8	60%			
10	77	-3.269	32,0	55%	77,2	-3.468	32,0	55%	77,2	-3.649	30,8	55%	77,2	-3.826	30,8	55%			
11	87	-2.972	34,5	50%	86,9	-3.144	33,2	55%	86,9	-3.317	33,2	55%	86,9	-3.487	31,9	55%			
12	98	-2.641	35,6	50%	97,7	-2.805	35,6	50%	97,7	-2.969	34,1	50%	97,7	-3.131	34,1	50%			
13	110	-2.292	38,2	45%	109,9	-2.446	36,5	50%	109,9	-2.601	36,5	50%	109,9	-2.754	34,9	50%			
14	124	-1.923	39,1	45%	123,7	-2.067	39,1	45%	123,7	-2.212	37,4	45%	123,7	-2.356	37,2	45%			
15	139	-1.540	41,7	45%	138,1	-1.673	41,7	45%	139,1	-1.830	39,8	45%	139,1	-1.980	39,6	40%			
16	157	-1.139	44,4	40%	156,5	-1.260	44,4	40%	156,5	-1.393	42,1	40%	156,5	-1.504	40,2	40%			
17	176	-0.724	47,2	40%	176	-0.833	47,2	40%	176	-0.943	44,5	40%	176	-1.052	44,5	40%			
18	198	-0.294	50,0	35%	198	-0.369	50,0	40%	198	-0.466	47,0	40%	198	-0.581	47,0	40%			
19	223	0.151	52,8	35%	222,8	0.069	52,8	35%	222,8	-0.013	52,8	35%	222,8	-0.095	49,5	35%			
20	251	0.806	59,2	35%	250,6	0.539	55,5	35%	250,6	0.472	55,5	35%	250,6	0.405	55,5	35%			
21	282	1.072	62,3	35%	281,9	1.021	62,3	35%	281,9	0.969	58,2	35%	281,9	0.918	58,2	35%			
22	317	1.547	70,0	30%	317,1	1.512	65,3	30%	317,1	1.478	65,3	30%	317,1	1.441	60,7	30%			
23	357	2.030	73,4	30%	356,7	2.011	73,4	30%	356,7	1.994	68,1	30%	356,7	1.976	68,1	30%			
24	401	2.518	82,4	30%	401,2	2.517	76,5	30%	401,2	2.518	76,5	30%	401,2	2.515	76,5	30%			
25	451	3.013	86,0	30%	451,4	3.030	86,0	30%	451,4	3.048	79,4	30%	451,4	3.064	79,4	30%			
26	503	3.508	90,7	30%	503,7	3.543	89,0	30%	503,7	3.581	80,7	30%	503,7	3.613	80,4	30%			
27	571	4.006	100,2	25%	571,1	4.059	100,2	25%	571,1	4.115	100,2	30%	571,1	4.167	91,8	25%			
28	643	4.504	112,6	25%	642,5	4.576	112,6	25%	642,5	4.651	103,2	25%	642,5	4.722	103,2	25%			
29	723	5.000	126,6	25%	722,7	5.090	116,0	25%	722,7	5.185	116,0	25%	722,7	5.275	116,0	25%			
30	813	5.493	142,3	25%	813	5.603	130,4	25%	813	5.717	130,4	25%	813	5.826	130,4	25%			
31	915	5.983	146,6	25%	914,6	6.112	146,6	25%	914,6	6.245	146,6	25%	914,6	6.372	133,3	25%			
32	1029	6.466	164,8	25%	1028,8	6.615	164,8	25%	1028,8	6.767	164,8	25%	1028,8	6.914	149,8	25%			
33	1157	6.944	185,3	25%	1157,3	7.111	185,3	25%	1157,3	7.283	185,3	25%	1157,3	7.449	188,5	25%			
34	1302	7.414	208,3	25%	1301,8	7.580	203,3	25%	1301,8	7.791	189,4	25%	1301,8	7.976	189,4	25%			
35	1464	7.876	234,3	25%	1464,4	8.081	218,5	25%	1464,4	8.291	219,5	25%	1464,4	8.494	219,5	25%			
36	1647	8.328	263,4	25%	1647,5	8.563	239,5	25%	1647,4	8.762	239,5	25%	1647,4	8.959	239,5	25%			
37	1853	8.772	289,3	25%	1853,1	9.015	269,3	25%	1853,1	9.267	269,3	25%	1853,1	9.509	269,3	25%			
38	2065	9.207	302,9	25%	2064,6	9.647	302,9	25%	2064,6	9.733	302,9	25%	2064,6	9.990	272,6	25%			
39	2345	9.631	340,6	20%	2344,9	9.908	340,6	20%	2344,9	10.193	340,6	20%	2344,9	10.467	305,5	20%			
40	2638	10.044	383,0	20%	2637,8	10.340	383,0	20%	2637,8	10.641	383,0	20%	2637,8	10.933	344,7	20%			
41	2967	10.447	430,8	20%	2967,3	10.759	430,8	20%	2967,3	11.078	430,8	20%	2967,3	11.387	387,7	20%			
42	3338	10.838	484,0	20%	3337,9	11.167	484,0	20%	3337,9	11.503	484,0	20%	3337,9	11.827	436,1	15%			
43	3755	11.215	544,9	20%	3754,9	11.569	544,9	20%	3754,9	11.910	544,9	20%	3754,9	12.250	490,4	20%			
44	4224	11.576	612,9	10%	4223,9	11.935	612,9	10%	4223,9	12.301	612,9	10%	4223,9	12.655	551,6	10%			
45	1.4E+06	12.427	4.1E+04	15%	1.2E+06	17.894	3.6E+04	15%	1.1E+06	16.367	3.1E+04	15%	9.4E+05	16.811	2.7E+04	15%			
46	4.0E+09	13.708	4.6E+09	10%	3.7E+09	15.458	4.0E+09	10%	3.4E+09	14.016	3.6E+09	10%	3.1E+09	14.592	3.0E+09	10%			
47	1.6E+11	21.078	2.4E+09	10%	1.1E+11	21.744	1.6E+09	10%	1.1E+10	22.312	1.0E+09	10%	4.7E+09	23.045	6.0E+08	70%			
48	5.5E+13	21.648	8.0E+11	100%	3.2E+13	22.368	4.6E+11	100%	1.8E+13	23.092	2.6E+11	100%	1.0E+13	23.783	1.5E+11	100%			
49	1.9E+16	21.269	2.7E+14	100%	9.3E+15	22.706	1.3E+14	100%	4.6E+15	23.468	6.7E+13	100%	2.3E+15	24.198	3.4E+13	100%			

Apêndice VI – Estrutura e exemplo dos arquivos de entrada e saída de dados do otimizador

Idade: 69 anos						Idade: 68 anos						Idade: 67 anos						Idade: 66 anos					
j	W_{ij}	f_i	(W_{ij})	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima	W_{ij}	f_i	(W_{ij})	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima	W_{ij}	f_i	(W_{ij})	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima	W_{ij}	f_i	(W_{ij})	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima			
0	1	-8.644	5.5	30%		1	-8.866	5.5	30%		1	-9.084	5.5	30%		1	-9.301	5.5	30%				
1	2	-8.316	6.6	30%		2.1	-8.537	6.6	30%		2.1	-8.756	6.6	30%		2.1	-8.972	6.6	30%				
2	5	-7.797	9.0	30%		4.5	-8.018	9.0	30%		4.5	-8.236	9.0	30%		4.5	-8.453	9.0	30%				
3	10	-7.136	14.0	30%		9.5	-7.357	14.0	30%		9.5	-7.575	14.0	30%		9.5	-7.792	14.0	30%				
4	20	-6.378	21.5	45%		20.2	-6.598	21.5	45%		20.2	-6.815	21.1	50%		20.2	-7.030	21.1	50%				
5	43	-5.218	25.5	80%		42.9	-5.423	24.8	80%		42.9	-5.624	24.8	80%		42.9	-5.824	24.8	80%				
6	48	-4.979	26.0	70%		48.2	-5.179	26.0	70%		48.2	-5.377	25.3	70%		48.2	-5.572	25.3	80%				
7	54	-4.716	27.3	65%		54.3	-4.912	26.5	65%		54.3	-5.104	26.5	70%		54.3	-5.296	26.5	70%				
8	61	-4.441	28.5	65%		61	-4.631	27.6	65%		61	-4.818	27.6	65%		61	-5.004	26.6	65%				
9	69	-4.140	29.8	60%		68.7	-4.324	28.7	60%		68.7	-4.506	28.7	60%		68.7	-4.686	27.6	60%				
10	77	-3.826	30.8	55%		77.2	-4.003	29.7	60%		77.2	-4.178	29.7	60%		77.2	-4.351	29.7	60%				
11	87	-3.487	31.9	55%		86.9	-3.657	31.9	55%		86.9	-3.824	30.5	55%		86.9	-3.990	30.5	55%				
12	98	-3.131	34.1	50%		97.7	-3.293	32.7	50%		97.7	-3.453	32.7	55%		97.7	-3.611	32.7	55%				
13	110	-2.754	34.9	50%		109.9	-2.907	34.9	50%		109.9	-3.058	34.9	50%		109.9	-3.207	33.2	50%				
14	124	-2.355	37.2	45%		123.7	-2.498	37.2	45%		123.7	-2.638	35.4	45%		123.7	-2.779	35.4	50%				
15	139	-1.940	39.6	45%		139.1	-2.072	39.6	45%		139.1	-2.203	39.7	45%		139.1	-2.332	37.5	45%				
16	157	-1.504	42.1	40%		156.5	-1.625	42.1	40%		156.5	-1.744	39.7	45%		156.5	-1.862	39.7	45%				
17	176	-1.052	44.5	40%		176	-1.160	44.5	40%		176	-1.268	41.9	40%		176	-1.374	41.9	40%				
18	198	-0.581	47.0	40%		198	-0.677	47.0	40%		198	-0.771	44.1	40%		198	-0.864	44.1	40%				
19	223	-0.095	49.5	35%		222.8	-0.175	49.5	35%		222.8	-0.256	49.5	35%		222.8	-0.336	46.2	35%				
20	251	0.405	55.5	35%		250.6	0.339	51.8	35%		250.6	0.273	51.8	35%		250.6	0.208	51.8	35%				
21	282	0.918	58.2	35%		281.9	0.857	58.2	35%		281.9	0.816	54.0	35%		281.9	0.767	54.0	35%				
22	317	1.441	60.7	30%		317.1	1.407	60.7	35%		317.1	1.373	60.7	35%		317.1	1.338	60.7	35%				
23	357	1.976	68.1	30%		356.7	1.957	68.1	30%		356.7	1.938	62.9	30%		356.7	1.922	62.9	30%				
24	401	2.515	76.5	30%		401.2	2.515	70.6	30%		401.2	2.515	70.6	30%		401.2	2.513	70.6	30%				
25	451	3.064	79.4	30%		451.4	3.081	79.4	30%		451.4	3.097	79.4	30%		451.4	3.114	72.8	30%				
26	508	3.614	89.2	30%		507.7	3.649	81.7	30%		507.7	3.684	81.7	30%		507.7	3.719	81.7	30%				
27	571	4.167	91.8	25%		571.1	4.222	91.8	30%		571.1	4.274	91.8	30%		571.1	4.327	91.8	30%				
28	643	4.722	103.2	25%		642.5	4.795	103.2	25%		642.5	4.866	103.2	25%		642.5	4.937	93.9	25%				
29	723	5.275	116.0	25%		722.7	5.366	116.0	25%		722.7	5.456	105.5	25%		722.7	5.546	105.5	25%				
30	813	5.826	130.4	25%		813	5.936	118.6	25%		813	6.045	118.6	25%		813	6.154	118.6	25%				
31	915	6.372	133.3	25%		914.6	6.503	133.3	25%		914.6	6.631	133.3	25%		914.6	6.757	133.3	25%				
32	1029	6.914	149.8	25%		1028.8	7.063	149.8	25%		1028.8	7.209	149.8	25%		1028.8	7.354	134.9	25%				
33	1157	7.449	168.5	25%		1157.3	7.617	168.5	25%		1157.3	7.781	168.5	25%		1157.3	7.946	151.6	25%				
34	1302	7.976	189.4	25%		1301.8	8.162	189.4	25%		1301.8	8.346	170.5	25%		1301.8	8.529	170.5	25%				
35	1464	8.494	213.0	25%		1464.4	8.699	213.0	25%		1464.4	8.902	191.7	25%		1464.4	9.103	191.7	25%				
36	1647	9.003	239.5	25%		1647.4	9.227	215.6	25%		1647.4	9.448	215.6	25%		1647.4	9.668	215.6	25%				
37	1853	9.502	269.3	25%		1853.1	9.744	242.4	25%		1853.1	9.983	242.4	25%		1853.1	10.220	242.4	25%				
38	2095	9.990	272.6	25%		2084.6	10.250	272.6	25%		2084.6	10.507	272.6	25%		2084.6	10.762	272.6	25%				
39	2345	10.467	306.5	20%		2344.9	10.745	306.5	25%		2344.9	11.019	306.5	25%		2344.9	11.291	306.5	25%				
40	2638	10.933	344.7	20%		2637.8	11.229	344.7	20%		2637.8	11.520	344.7	20%		2637.8	11.808	344.7	20%				
41	2967	11.387	387.7	20%		2967.3	11.700	387.7	20%		2967.3	12.007	387.7	20%		2967.3	12.312	387.7	20%				
42	3338	11.827	436.1	15%		3337.9	12.156	436.1	15%		3337.9	12.480	436.1	15%		3337.9	12.801	436.1	15%				
43	3755	12.250	490.4	20%		3754.9	12.594	490.4	20%		3754.9	12.932	490.4	20%		3754.9	13.268	490.4	20%				
44	4224	12.655	551.6	10%		4223.9	13.013	551.6	10%		4223.9	13.365	551.6	10%		4223.9	13.714	551.6	10%				
45	9.4E+05	18.811	2.7E+04	15%		8.2E+05	19.250	2.4E+04	15%		7.1E+05	19.670	2.1E+04	15%		6.2E+05	20.075	1.8E+04	15%				
46	2.1E+08	21.650	3.0E+06	40%		1.6E+08	22.193	2.3E+06	40%		1.2E+08	22.712	1.7E+06	40%		9.1E+07	23.212	1.3E+06	40%				
47	4.7E+10	23.045	6.8E+08	70%		3.1E+10	23.672	4.5E+08	70%		2.0E+10	24.275	2.9E+08	70%		1.3E+10	24.859	1.3E+08	70%				
48	1.0E+13	23.783	1.5E+11	100%		6.0E+12	24.469	8.7E+10	100%		3.4E+12	25.132	5.0E+10	100%		2.0E+12	25.777	2.9E+10	100%				
49	2.3E+15	24.198	3.4E+13	100%		1.2E+15	24.924	1.7E+13	100%		5.8E+14	25.630	8.4E+12	100%		2.9E+14	26.319	4.2E+12	100%				

Idade: 65 anos						Idade: 64 anos						Idade: 63 anos						Idade: 62 anos					
j	W_{ij}	f_i	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima		W_{ij}	f_i	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima		W_{ij}	f_i	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima		W_{ij}	f_i	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima				
0	1	-4,435	28,8	45%		1	-2,326	36,7	65%		1	-1,025	36,7	80%		1	-0,121	36,7	100%				
1	2	-4,377	29,8	45%		2,3	-2,284	38,0	65%		2,3	-0,983	38,0	80%		2,3	-0,079	38,0	100%				
2	6	-4,241	31,1	45%		5,5	-2,188	41,2	65%		5,5	-0,887	41,2	80%		5,5	0,018	41,2	100%				
3	13	-3,954	34,6	45%		13	-1,988	44,5	65%		13	-0,694	48,7	80%		13	0,210	48,7	100%				
4	30	-3,372	37,4	45%		30,4	-1,565	47,9	60%		30,4	-0,343	56,6	80%		30,4	0,546	60,4	90%				
5	72	-2,181	43,6	40%		71,5	-0,679	54,4	55%		71,5	0,380	62,2	70%		71,5	1,179	70,0	80%				
6	79	-1,979	45,1	40%		79,3	-0,523	55,1	55%		79,3	0,508	63,4	65%		79,3	1,290	71,7	80%				
7	88	-1,758	46,7	40%		88,1	-0,363	56,7	50%		88,1	0,649	64,7	65%		88,1	1,413	71,8	80%				
8	98	-1,524	48,4	40%		97,8	-0,171	58,1	50%		97,8	0,801	65,8	65%		97,8	1,546	73,6	80%				
9	109	-1,273	48,2	40%		108,6	0,027	58,6	50%		108,6	0,966	67,0	60%		108,6	1,690	75,4	70%				
10	121	-1,005	49,9	40%		120,6	0,238	61,2	50%		120,6	1,144	68,0	60%		120,6	1,847	77,1	70%				
11	134	-0,720	51,7	35%		133,9	0,465	61,5	45%		133,9	1,336	71,4	60%		133,9	2,016	78,7	65%				
12	149	-0,421	53,5	35%		148,6	0,707	64,2	45%		148,6	1,542	72,2	55%		148,6	2,198	80,2	65%				
13	165	-0,102	55,3	35%		165,0	0,965	67,0	45%		165	1,763	75,7	55%		165	2,939	81,5	60%				
14	183	0,233	60,4	35%		183,2	1,231	69,9	45%		183,2	2,001	76,2	50%		183,2	2,806	82,6	60%				
15	204	0,686	62,6	35%		203,9	1,631	69,4	45%		203,9	2,253	83,6	45%		203,9	3,246	86,7	55%				
16	226	0,953	64,4	35%		225,8	1,839	72,1	40%		225,9	2,522	85,6	45%		225,8	3,073	87,2	55%				
17	251	1,337	66,5	30%		250,7	2,164	78,9	40%		250,7	2,807	83,1	45%		250,7	3,331	91,4	50%				
18	278	1,738	72,9	30%		278,4	2,506	82,0	40%		278,4	3,109	86,6	45%		278,4	3,606	95,7	50%				
19	309	2,153	75,0	30%		309,1	2,863	85,9	35%		309,1	3,427	90,0	40%		309,1	3,896	100,0	45%				
20	343	2,579	82,4	30%		343,1	3,234	87,0	35%		343,1	3,760	93,4	40%		343,1	4,202	104,4	45%				
21	381	3,022	84,6	30%		381	3,622	90,7	35%		381	4,110	102,7	40%		381	4,525	108,8	45%				
22	423	3,474	93,2	30%		423	4,024	99,8	35%		423	4,476	106,4	35%		423	4,863	113,1	40%				
23	470	3,937	95,3	30%		469,6	4,438	102,6	30%		469,6	4,849	109,9	35%		469,6	5,217	117,3	40%				
24	521	4,410	105,0	30%		521,4	4,865	113,1	30%		521,4	5,285	121,35	35%		521,4	5,596	121,2	40%				
25	579	4,890	107,0	25%		578,5	5,303	116,5	30%		578,5	5,679	127,9	35%		578,5	5,956	127,9	35%				
26	643	5,378	118,2	25%		642,7	5,751	127,9	30%		642,7	6,074	127,9	30%		642,7	6,366	137,7	35%				
27	714	5,870	130,4	25%		713,6	6,208	130,4	30%		713,6	6,505	141,3	30%		713,6	6,775	141,3	35%				
28	792	6,366	132,1	25%		792,3	6,672	144,1	30%		792,3	6,943	144,1	30%		792,3	7,196	156,1	35%				
29	880	6,865	146,0	25%		879,6	7,142	159,3	25%		879,6	7,392	159,3	30%		879,6	7,627	159,3	30%				
30	977	7,365	161,6	25%		976,6	7,617	161,5	25%		976,6	7,847	176,1	30%		976,6	8,067	176,1	30%				
31	1084	7,864	178,5	25%		1084,3	8,095	178,6	25%		1084,3	8,308	178,6	30%		1084,3	8,515	194,9	30%				
32	1204	8,363	197,7	25%		1203,9	8,576	197,7	25%		1203,9	8,774	197,7	25%		1203,9	8,970	197,7	30%				
33	1334	8,860	199,0	25%		1336,6	9,056	218,9	25%		1336,6	9,243	218,9	25%		1336,6	9,430	218,9	30%				
34	1484	9,363	220,3	25%		1484	9,538	220,3	25%		1484	9,714	242,4	25%		1484	9,893	242,4	30%				
35	1649	9,862	244,7	25%		1647,9	10,018	244,7	25%		1647,9	10,198	264,7	25%		1647,9	10,377	264,7	25%				
36	1829	10,365	270,1	25%		1829,3	10,495	270,1	25%		1829,3	10,669	270,1	25%		1829,3	10,828	270,1	25%				
37	2031	10,803	299,6	25%		2031,1	10,968	299,6	25%		2031,1	11,129	299,6	25%		2031,1	11,296	299,6	25%				
38	2255	11,273	332,1	25%		2255	11,436	332,1	25%		2255	11,595	332,1	25%		2255	11,762	332,1	25%				
39	2504	11,736	368,1	20%		2503,7	11,898	368,1	25%		2503,7	12,058	368,1	25%		2503,7	12,225	368,1	25%				
40	2780	12,190	404,1	20%		2779,7	12,365	367,3	25%		2779,7	12,516	367,3	25%		2779,7	12,686	367,3	25%				
41	3086	12,636	407,3	20%		3086,2	12,804	407,3	20%		3086,2	12,968	407,3	20%		3086,2	13,142	407,3	20%				
42	3427	13,068	501,9	20%		3426,5	13,241	451,7	20%		3426,5	13,409	451,7	20%		3426,5	13,587	451,7	20%				
43	3804	13,487	556,6	20%		3804,4	13,665	501,9	20%		3804,4	13,838	501,9	20%		3804,4	14,021	501,9	20%				
44	4224	13,888	555,7	5%		4223,9	14,070	555,7	5%		4223,9	14,248	555,7	5%		4223,9	14,436	555,7	5%				
45	4,645	15,263	1,70E+04	15%		4,716	15,455	1,72E+04	15%		4,716	15,629	1,72E+04	15%		4,716	15,803	1,72E+04	15%				
46	6,9E+07	23,65	2,0E+06			5,2E+07	24,048	1,5E+06			4,0E+07	24,388	1,2E+06			4,30E+07	24,701	8,7E+05					
47	8,9E+09	25,400	1,3E+08	70%		5,8E+09	25,903	8,5E+07	70%		3,9E+09	26,349	5,6E+07	70%		2,5E+09	26,765	3,7E+07	70%				
48	1,1E+12	26,385	1,6E+10	100%		6,5E+11	26,994	9,4E+09	100%		3,7E+11	27,478	5,4E+09	100%		2,1E+11	27,972	3,1E+09	100%				
49	1,5E+14	26,972	2,1E+12	100%		7,3E+13	27,594	1,1E+12	100%		3,6E+13	28,164	5,3E+11			1,8E+13	28,712	2,6E+11	100%				

Apêndice VI – Estrutura e exemplo dos arquivos de entrada e saída de dados do otimizador

Idade: 62 anos					Idade: 61 anos					Idade: 60 anos					Idade: 59 anos				
j	W_{ij}	$f_i(W_{ij})$	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima	W_{ij}	$f_i(W_{ij})$	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima		W_{ij}	$f_i(W_{ij})$	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima		W_{ij}	$f_i(W_{ij})$	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima	
0	1	-0,121	36,7	100%	1	0,562	36,7	100%		1	1,107	36,7	100%		1	1,557	36,7	100%	
1	2	-0,079	38,0	100%	2,3	0,604	38,0	100%		2,3	1,149	38,0	100%		2,3	1,599	38,0	100%	
2	6	0,018	41,2	100%	5,5	0,701	41,2	100%		5,5	1,246	41,2	100%		5,5	1,696	41,2	100%	
3	13	0,210	48,7	100%	13	0,893	48,7	100%		13	1,438	48,7	100%		13	1,888	48,7	100%	
4	30	0,546	60,4	90%	30,4	1,223	63,3	100%		30,4	1,766	64,2	100%		30,4	2,215	66,1	100%	
5	72	1,179	70,0	80%	71,5	1,812	76,2	90%		71,5	2,329	79,3	90%		71,5	2,762	82,4	90%	
6	79	1,290	71,7	80%	79,3	1,913	76,7	90%		79,3	2,423	81,7	90%		79,3	2,852	83,4	90%	
7	88	1,413	71,8	80%	88,1	2,023	79,0	90%		88,1	2,526	82,6	90%		88,1	2,950	86,2	90%	
8	98	1,546	73,6	80%	97,8	2,143	79,4	80%		97,8	2,637	83,3	90%		97,8	3,055	87,1	90%	
9	109	1,693	75,4	70%	108,6	2,273	81,5	80%		108,6	2,758	85,8	90%		108,6	3,169	90,0	90%	
10	121	1,847	77,1	70%	120,6	2,414	83,0	80%		120,6	2,889	88,4	90%		120,6	3,293	93,7	90%	
11	134	2,016	78,7	65%	133,9	2,567	83,6	80%		133,9	3,031	88,6	80%		133,9	3,427	93,5	90%	
12	149	2,198	80,2	65%	148,6	2,732	85,5	70%		148,6	3,184	90,9	80%		148,6	3,571	96,2	90%	
13	165	2,395	81,5	60%	165	2,911	87,3	70%		165	3,350	93,1	80%		165	3,727	96,1	80%	
14	183	2,606	82,6	60%	183,2	3,104	88,9	65%		183,2	3,529	95,2	70%		183,2	3,886	98,4	80%	
15	203	2,832	86,7	55%	203,4	3,311	93,6	65%		203,4	3,722	97,1	70%		203,4	4,079	100,6	60%	
16	226	3,073	87,2	55%	225,8	3,533	94,8	60%		225,8	3,929	98,6	65%		225,8	4,275	102,4	70%	
17	251	3,331	91,4	50%	250,7	3,771	95,5	55%		250,7	4,152	103,8	65%		250,7	4,486	108,0	70%	
18	278	3,606	95,7	50%	278,4	4,025	100,2	55%		278,4	4,390	104,8	60%		278,4	4,712	109,3	65%	
19	309	3,896	100,0	45%	309,1	4,294	105,0	50%		309,1	4,644	110,0	55%		309,1	4,954	115,0	60%	
20	343	4,202	104,4	45%	343,1	4,579	109,9	50%		343,1	4,914	109,9	55%		343,1	5,212	115,4	60%	
21	381	4,525	108,8	45%	381	4,862	114,8	45%		381	5,201	114,8	50%		381	5,486	120,9	55%	
22	423	4,863	113,1	40%	423	5,200	119,7	45%		423	5,504	119,7	50%		423	5,777	126,4	60%	
23	470	5,217	117,3	40%	469,6	5,534	124,6	45%		469,6	5,823	124,6	45%		469,6	6,083	131,9	50%	
24	521	5,596	121,2	40%	521,4	5,895	129,3	40%		521,4	6,158	129,3	45%		521,4	6,407	137,3	45%	
25	579	5,969	133,7	35%	578,9	6,250	133,7	40%		578,9	6,508	142,6	40%		578,9	6,747	142,6	45%	
26	643	6,366	137,7	35%	642,7	6,628	137,7	35%		642,7	6,875	147,6	40%		642,7	7,101	147,6	40%	
27	714	6,775	141,3	35%	713,6	7,022	152,1	35%		713,6	7,255	152,1	40%		713,6	7,471	152,1	40%	
28	792	7,196	156,1	35%	792,3	7,428	156,1	35%		792,3	7,649	156,1	35%		792,3	7,866	168,1	40%	
29	880	7,627	159,3	30%	879,6	7,845	172,5	35%		879,6	8,056	172,5	35%		879,6	8,254	172,5	35%	
30	977	8,067	176,1	30%	976,6	8,273	176,1	30%		976,6	8,474	176,1	35%		976,6	8,665	190,8	35%	
31	1084	8,515	194,9	30%	1084,3	8,710	194,9	30%		1084,3	8,904	194,9	35%		1084,3	9,088	194,9	35%	
32	1204	8,970	197,7	30%	1203,9	9,155	197,7	30%		1203,9	9,341	215,7	30%		1203,9	9,520	215,7	35%	
33	1337	9,430	218,9	30%	1336,6	9,608	218,9	30%		1336,6	9,789	218,9	30%		1336,6	9,963	218,9	30%	
34	1484	9,893	242,4	30%	1484	10,066	242,4	30%		1484	10,242	242,4	30%		1484	10,413	242,4	30%	
35	1648	10,360	244,1	25%	1647,7	10,528	244,1	30%		1647,7	10,701	244,1	30%		1647,7	10,869	244,1	30%	
36	1829	10,838	270,4	25%	1829,3	10,993	270,4	25%		1829,3	11,165	270,4	30%		1829,3	11,332	270,4	30%	
37	2031	11,296	299,6	25%	2031,1	11,460	299,6	25%		2031,1	11,631	299,6	25%		2031,1	11,798	299,6	25%	
38	2255	11,762	332,1	25%	2255	11,925	332,1	25%		2255	12,097	332,1	25%		2255	12,265	332,1	25%	
39	2504	12,225	368,1	25%	2503,7	12,390	368,1	25%		2503,7	12,563	331,3	25%		2503,7	12,733	331,3	25%	
40	2780	12,686	367,3	25%	2779,7	12,853	367,3	25%		2779,7	13,029	367,3	25%		2779,7	13,203	367,3	25%	
41	3086	13,142	407,3	20%	3086,2	13,312	407,3	20%		3086,2	13,492	407,3	20%		3086,2	13,669	407,3	20%	
42	3427	13,587	451,7	20%	3426,5	13,761	451,7	20%		3426,5	13,945	451,7	20%		3426,5	14,126	451,7	20%	
43	3804	14,021	501,0	20%	3804,4	14,200	501,0	20%		3804,4	14,388	501,0	20%		3804,4	14,573	501,0	20%	
44	4224	14,436	555,7	5%	4223,9	14,619	555,7	5%		4223,9	14,812	555,7	5%		4223,9	15,001	555,7	5%	
45	3,6E+05	21,029	1,0E+04	15%	3,1E+05	21,197	9,0E+03	15%		2,7E+05	21,368	7,8E+03	15%		2,4E+05	21,497	1,0E+04	20%	
46	3,0E+07	24,701	8,7E+05	40%	2,3E+07	24,969	6,8E+05	40%		1,7E+07	25,218	5,0E+05	40%		1,3E+07	25,431	3,8E+05	40%	
47	2,5E+09	26,765	3,7E+07	70%	1,7E+09	27,132	2,4E+07	70%		1,1E+09	27,478	1,6E+07	70%		7,3E+08	27,781	1,1E+07	70%	
48	2,1E+11	27,972	3,1E+09	100%	1,2E+11	28,418	1,8E+09	100%		7,1E+10	28,844	1,0E+09	100%		4,1E+10	29,227	5,9E+08	100%	
49	1,8E+13	28,712	2,6E+11	100%	9,1E+12	29,214	1,3E+11	100%		4,5E+12	29,700	6,6E+10	100%		2,3E+12	30,144	3,3E+10	100%	

Idade: 58 anos					Idade: 57 anos					Idade: 56 anos					Idade: 55 anos				
j	W_{ij}	$f_i(W_{ij})$	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima	W_{ij}	$f_i(W_{ij})$	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima		W_{ij}	$f_i(W_{ij})$	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima		W_{ij}	$f_i(W_{ij})$	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima	
0	1	1,938	36,7	90%	1	2,268	36,7	90%		1	2,558	36,7	80%		1	2,816	36,7	80%	
1	2	1,981	38,0	90%	2,3	2,310	38,0	90%		2,3	2,600	38,0	80%		2,3	2,858	38,0	80%	
2	6	2,077	41,2	90%	5,5	2,407	41,2	90%		5,5	2,696	41,2	80%		5,5	2,954	41,2	80%	
3	13	2,269	48,7	90%	13	2,599	48,7	90%		13	2,889	48,7	80%		13	3,147	48,7	80%	
4	30	2,597	66,1	90%	30,4	2,926	66,1	90%		30,4	3,216	66,1	80%		30,4	3,474	66,1	80%	
5	72	3,132	83,9	90%	71,5	3,454	85,5	90%		71,5	3,738	87,0	80%		71,5	3,993	87,0	80%	
6	79	3,219	86,7	90%	79,3	3,539	88,4	90%		79,3	3,822	88,4	80%		79,3	4,076	90,0	80%	
7	88	3,314	88,0	90%	88,1	3,632	89,8	90%		88,1	3,913	91,6	80%		88,1	4,165	93,3	80%	
8	98	3,415	91,0	90%	97,8	3,730	92,9	90%		97,8	4,010	94,9	90%		97,8	4,261	94,9	80%	
9	109	3,525	92,1	90%	108,6	3,836	94,2	90%		108,6	4,114	96,3	90%		108,6	4,363	98,3	80%	
10	121	3,643	95,2	90%	120,6	3,951	97,5	90%		120,6	4,225	99,7	90%		120,6	4,472	99,7	80%	
11	134	3,771	95,9	90%	133,9	4,074	98,4	90%		133,9	4,346	100,8	90%		133,9	4,590	103,3	90%	
12	149	3,908	98,9	90%	148,6	4,207	101,6	90%		148,6	4,475	104,2	90%		148,6	4,717	104,2	90%	
13	165	4,058	101,9	80%	165	4,351	104,8	90%		165	4,615	104,8	90%		165	4,854	107,7	80%	
14	183	4,219	101,6	80%	183,2	4,507	104,8	80%		183,2	4,766	107,9	80%		183,2	5,001	111,1	80%	
15	203	4,393	104,0	80%	203,4	4,675	107,5	80%		203,4	4,929	111,0	80%		203,4	5,160	111,0	80%	
16	226	4,581	106,2	80%	225,8	4,866	110,0	80%		225,8	5,104	113,8	80%		225,8	5,332	113,8	80%	
17	251	4,783	108,0	70%	250,7	5,060	112,1	80%		250,7	5,294	116,3	80%		250,7	5,517	116,3	80%	
18	278	5,000	113,9	70%	278,4	5,260	113,9	70%		278,4	5,498	118,4	70%		278,4	5,716	123,0	80%	
19	309	5,232	115,0	65%	309,1	5,485	120,0	70%		309,1	5,716	120,0	70%		309,1	5,930	125,0	70%	
20	343	5,480	120,9	60%	343,1	5,724	120,9	65%		343,1	5,949	126,3	65%		343,1	6,158	126,3	70%	
21	381	5,744	126,9	60%	381	5,981	126,9	60%		381	6,200	126,9	65%		381	6,403	132,9	65%	
22	423	6,025	126,4	55%	423	6,254	133,0	55%		423	6,466	133,0	60%		423	6,684	133,0	60%	
23	470	6,322	131,9	50%	469,6	6,543	139,2	55%		469,6	6,749	139,2	55%		469,6	6,942	139,2	60%	
24	521	6,636	137,3	50%	521,4	6,849	145,5	50%		521,4	7,049	145,5	55%		521,4	7,237	145,5	55%	
25	576	6,963	143,9	45%	576,9	7,173	151,5	45%		576,9	7,373	151,5	50%		576,9	7,560	151,5	50%	
26	643	7,313	147,6	40%	642,7	7,511	157,4	45%		642,7	7,699	157,4	50%		642,7	7,878	157,4	50%	
27	714	7,675	163,0	40%	713,6	7,867	163,0	45%		713,6	8,049	163,0	45%		713,6	8,223	163,0	45%	
28	792	8,052	168,1	40%	792,3	8,238	168,1	40%		792,3	8,415	168,1	45%		792,3	8,585	168,1	45%	
29	880	8,443	172,5	40%	879,6	8,623	172,5	40%		879,6	8,795	185,8	40%		879,6	8,962	185,8	40%	
30	977	8,847	190,8	35%	976,6	9,023	190,8	40%		976,6	9,192	190,8	40%		976,6	9,355	190,8	40%	
31	1084	9,265	194,9	35%	1084,3	9,435	194,9	35%		1084,3	9,601	194,9	35%		1084,3	9,762	194,9	40%	
32	1204	9,693	215,7	35%	1203,9	9,861	215,7	35%		1203,9	10,023	215,7	35%		1203,9	10,182	215,7	35%	
33	1337	10,132	218,9	30%	1336,6	10,296	218,9	35%		1336,6	10,457	218,9	35%		1336,6	10,614	218,9	35%	
34	1484	10,579	242,4	30%	1484	10,742	242,4	30%		1484	10,901	242,4	35%		1484	11,058	242,4	35%	
35	1646	11,034	268,7	30%	1647,7	11,196	268,7	30%		1647,7	11,354	268,7	35%		1647,7	11,511	268,7	35%	
36	1829	11,496	270,4	30%	1829,3	11,657	270,4	30%		1829,3	11,816	270,4	30%		1829,3	11,974	270,4	30%	
37	2031	11,962	299,3	30%	2031,1	12,124	299,3	30%		2031,1	12,284	299,3	30%		2031,1	12,443	299,3	30%	
38	2255	12,430	332,1	30%	2255	12,594	332,1	30%		2255	12,756	332,1	30%		2255	12,916	332,1	30%	
39	2504	12,901	331,3	25%	2503,7	13,067	331,3	30%		2503,7	13,232	331,3	30%		2503,7	13,395	331,3	30%	
40	2780	13,374	367,3	25%	2779,7	13,543	367,3	25%		2779,7	13,710	367,3	25%		2779,7	13,877	367,3	25%	
41	3086	13,843	407,3	20%	3086,2	14,015	407,3	25%		3086,2	14,186	407,3	25%		3086,2	14,356	407,3	25%	
42	3427	14,304	451,7	20%	3426,5	14,480	451,7	20%		3426,5	14,655	451,7	20%		3426,5	14,828	451,7	20%	
43	3804	14,756	501,0	20%	3804,4	14,936	501,0	20%		3804,4	15,114	501,0	20%		3804,4	15,291	501,0	20%	
44	4224	15,188	555,7	5%	4223,9	15,372	555,7	5%		4223,9	15,554	555,7	5%		4223,9	15,735	555,7	5%	
45	4,615	21,616	6,403	20%	4,615	21,798	6,403	20%		4,615	21,980	6,403	20%		4,615	22,163	6,403	20%	
46	9,9E+06	25,608	2,9E+06	40%	7,5E+06	25,759	2,2E+06	40%		5,7E+06	25,881	1,7E+06	40%		4,3E+06	25,979	1,3E+06	40%	
47	4,8E+08	28,045	7,0E+06	70%	3,2E+08	28,273	4,5E+06	70%		2,1E+08	28,469	6,1E+06	70%		1,4E+08	28,636	4,0E+06	70%	
48	2,3E+10	30,570	3,4E+08	100%	1,3E+10	29,876	1,9E+08	100%		7,7E+09	30,147	1,1E+08	100%		4,4E+09	30,386	6,4E+07	100%	
49	1,1E+12	32,940	1,6E+10	100%	5,7E+11	30,918	8,2E+08	100%		2,8E+11	31,254	4,1E+09	100%		1,4E+11	31,557	2,1E+09	100%	

Apêndice VI – Estrutura e exemplo dos arquivos de entrada e saída de dados do otimizador

Idade: 55 anos					Idade: 54 anos					Idade: 53 anos					Idade: 52 anos				
j	W_{ij}	$f_i(W_{ij})$	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima	W_{ij}	$f_i(W_{ij})$	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima		W_{ij}	$f_i(W_{ij})$	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima		W_{ij}	$f_i(W_{ij})$	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima	
0	1	2,816	36,7	80%	1	3,049	36,7	80%		1	3,261	36,7	80%		1	3,456	36,7	70%	
1	2	2,858	38,0	80%	2,3	3,091	38,0	80%		2,3	3,303	38,0	80%		2,3	3,498	38,0	70%	
2	6	2,964	41,2	80%	5,5	3,187	41,2	80%		5,5	3,399	41,2	80%		5,5	3,595	41,2	70%	
3	13	3,147	48,7	80%	13	3,380	48,7	80%		13	3,592	48,7	80%		13	3,787	48,7	70%	
4	30	3,474	66,1	80%	30,4	3,707	66,1	80%		30,4	3,919	66,1	80%		30,4	4,114	66,1	70%	
5	72	3,993	87,0	80%	71,5	4,223	87,0	80%		71,5	4,434	88,6	80%		71,5	4,628	88,6	80%	
6	79	4,076	90,0	80%	79,3	4,305	90,0	80%		79,3	4,515	91,7	80%		79,3	4,709	91,7	80%	
7	88	4,165	93,3	80%	88,1	4,394	93,3	80%		88,1	4,603	93,3	80%		88,1	4,796	95,1	80%	
8	98	4,261	94,9	80%	97,8	4,488	96,8	80%		97,8	4,697	96,8	80%		97,8	4,889	96,8	80%	
9	109	4,363	98,3	80%	108,6	4,589	98,3	80%		108,6	4,797	100,4	80%		108,6	4,989	100,4	80%	
10	121	4,472	99,7	80%	120,9	4,687	102,0	80%		120,8	4,904	102,0	80%		120,6	5,095	102,0	80%	
11	134	4,590	103,3	90%	133,9	4,813	103,3	90%		133,9	5,018	105,7	80%		133,9	5,208	105,7	80%	
12	149	4,717	104,2	90%	148,6	4,938	106,9	80%		148,6	5,141	106,9	80%		148,6	5,330	109,6	80%	
13	165	4,854	107,7	80%	165	5,072	107,7	80%		165	5,274	110,6	80%		165	5,462	110,6	80%	
14	183	5,001	111,1	80%	183,2	5,217	111,1	80%		183,2	5,417	111,1	80%		183,2	5,604	114,3	80%	
15	203	5,160	111,0	80%	203,4	5,374	114,4	80%		203,4	5,571	114,4	80%		203,4	5,758	117,9	80%	
16	226	5,332	113,8	80%	225,8	5,542	117,6	80%		225,8	5,737	117,6	80%		225,8	5,920	117,6	80%	
17	251	5,517	116,3	80%	250,7	5,724	120,4	80%		250,7	5,916	120,4	80%		250,7	6,097	120,4	80%	
18	278	5,716	123,0	80%	278,4	5,919	123,0	80%		278,4	6,109	123,0	80%		278,4	6,287	123,0	80%	
19	309	5,930	125,0	70%	309,1	6,129	125,0	70%		309,1	6,316	125,0	80%		309,1	6,492	130,0	80%	
20	343	6,158	126,3	70%	343,1	6,353	131,8	70%		343,1	6,537	131,8	70%		343,1	6,711	131,8	70%	
21	381	6,403	132,9	65%	381	6,595	132,9	70%		381	6,775	132,9	70%		381	6,946	132,9	70%	
22	423	6,664	133,0	60%	423	6,851	139,7	65%		423	7,028	139,7	65%		423	7,197	139,7	65%	
23	470	6,942	139,2	60%	469,6	7,125	139,2	60%		469,6	7,298	146,5	60%		469,6	7,465	146,5	65%	
24	521	7,237	145,4	55%	521,4	7,416	145,4	55%		521,4	7,586	145,4	60%		521,4	7,749	145,4	60%	
25	579	7,549	151,5	50%	578,9	7,724	151,5	55%		578,9	7,891	151,5	55%		578,9	8,052	151,5	55%	
26	643	7,878	157,4	50%	642,7	8,049	157,4	50%		642,7	8,213	157,4	50%		642,7	8,371	157,4	55%	
27	714	8,223	163,0	45%	713,6	8,390	163,0	50%		713,6	8,552	163,0	50%		713,6	8,708	163,0	50%	
28	792	8,585	168,1	45%	792,3	8,749	168,1	45%		792,3	8,908	180,1	45%		792,3	9,063	180,1	50%	
29	880	8,962	185,8	40%	879,6	9,123	185,8	45%		879,6	9,281	185,8	45%		879,6	9,434	185,8	45%	
30	977	9,355	190,8	40%	976,6	9,514	190,8	40%		976,6	9,669	190,8	40%		976,6	9,821	190,8	40%	
31	1084	9,762	194,9	40%	1084,3	9,919	194,9	40%		1084,3	10,072	194,9	40%		1084,3	10,224	194,9	40%	
32	1204	10,182	215,7	35%	1203,9	10,338	215,7	35%		1203,9	10,491	215,7	40%		1203,9	10,642	215,7	40%	
33	1337	10,614	218,9	35%	1336,6	10,769	218,9	35%		1336,6	10,922	218,9	35%		1336,6	11,073	218,9	35%	
34	1484	11,058	242,4	35%	1484	11,213	242,4	35%		1484	11,366	242,4	35%		1484	11,518	242,4	35%	
35	1648	11,511	268,5	35%	1647,7	11,666	268,5	35%		1647,7	11,820	244,1	35%		1647,7	11,973	244,1	35%	
36	1829	11,974	270,4	30%	1829,3	12,130	270,4	30%		1829,3	12,285	270,4	30%		1829,3	12,439	270,4	30%	
37	2031	12,443	299,6	30%	2031,1	12,600	299,6	30%		2031,1	12,757	299,6	30%		2031,1	12,914	299,6	30%	
38	2255	12,916	332,1	30%	2255	13,076	332,1	30%		2255	13,235	298,9	30%		2255	13,395	298,9	30%	
39	2504	13,395	331,3	30%	2503,7	13,558	331,3	30%		2503,7	13,721	331,3	30%		2503,7	13,883	331,3	30%	
40	2780	13,877	367,3	25%	2779,7	14,043	367,3	25%		2779,7	14,208	367,3	25%		2779,7	14,374	367,3	25%	
41	3086	14,366	407,3	25%	3086,2	14,525	407,3	25%		3086,2	14,694	407,3	25%		3086,2	14,863	407,3	25%	
42	3427	14,828	451,7	20%	3426,5	15,001	451,7	20%		3426,5	15,173	451,7	20%		3426,5	15,346	451,7	20%	
43	3804	15,291	501,0	20%	3804,4	15,467	501,0	20%		3804,4	15,643	501,0	20%		3804,4	15,819	501,0	20%	
44	4224	15,735	555,7	5%	4223,9	15,914	555,7	5%		4223,9	16,094	555,7	5%		4223,9	16,273	494,0	0%	
45	1,4E+05	21,880	5,9E+03	20%	1,2E+05	21,941	5,1E+03	20%		1,0E+05	21,988	4,5E+03	20%		8,9E+04	22,025	5,2E+03	20%	
46	4,3E+06	25,979	1,3E+05	40%	3,3E+06	26,054	9,5E+04	40%		2,5E+06	26,108	1,1E+05	45%		1,9E+06	26,143	8,2E+04	45%	
47	1,4E+08	28,636	4,0E+06	70%	9,1E+07	28,776	2,6E+06	70%		6,0E+07	28,889	1,7E+06	70%		4,0E+07	28,976	1,2E+06	70%	
48	4,4E+09	30,396	6,4E+07	100%	2,5E+09	30,596	3,7E+07	100%		1,5E+09	30,776	2,1E+07	100%		8,4E+08	30,928	2,4E+07	100%	
49	1,4E+11	31,557	2,1E+09	100%	7,1E+10	31,631	1,0E+09	100%		3,5E+10	32,076	5,1E+08	100%		1,8E+10	32,292	2,6E+08	100%	

Idade: 51 anos					Idade: 50 anos					Idade: 49 anos					Idade: 48 anos				
j	W_{ij}	$f_i(W_{ij})$	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima	W_{ij}	$f_i(W_{ij})$	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima		W_{ij}	$f_i(W_{ij})$	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima		W_{ij}	$f_i(W_{ij})$	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima	
0	1	3.633	36,7	70%	1	3.798	36,7	70%		1	3.901	34,4	70%		1	3.986	32,2	65%	
1	2	3.675	38,0	70%	2,3	3.840	38,0	70%		2,3	3.946	35,7	70%		2,3	4.034	33,5	65%	
2	6	3.772	41,2	70%	5,5	3.937	41,2	70%		5,4	4.046	38,8	70%		5,2	4.132	36,4	65%	
3	13	3.964	48,7	70%	13	4.129	48,7	70%		12,4	4.236	45,8	70%		11,9	4.326	43,1	65%	
4	30	4.291	66,1	70%	30,4	4.456	66,1	70%		28,8	4.564	62,2	70%		27,3	4.652	58,5	65%	
5	72	4.803	88,6	80%	71,5	4.968	88,6	70%		66,8	5.058	84,2	70%		62,4	5.135	80,1	70%	
6	79	4.884	91,7	80%	79,3	5.048	91,7	80%		74,3	5.138	87,4	70%		69,5	5.216	83,2	70%	
7	88	4.972	95,1	80%	88,1	5.136	95,1	80%		82,6	5.224	90,8	70%		77,5	5.302	86,7	70%	
8	98	5.064	96,8	80%	97,8	5.228	98,7	80%		91,9	5.315	94,4	70%		86,3	5.393	88,6	70%	
9	109	5.163	100,4	80%	108,6	5.326	100,4	80%		102,2	5.412	96,3	70%		96,2	5.490	92,4	70%	
10	121	5.268	104,3	80%	120,6	5.431	104,3	80%		113,7	5.515	100,2	80%		107,1	5.592	96,2	70%	
11	134	5.381	106,7	80%	133,9	5.543	105,7	80%		126,4	5.625	101,9	80%		119,4	5.703	98,3	70%	
12	149	5.502	109,6	80%	148,6	5.664	109,6	80%		140,6	5.744	105,9	80%		133	5.820	102,4	80%	
13	165	5.633	110,6	80%	165	5.793	113,5	80%		156,4	5.872	110,1	80%		148,2	5.947	104,0	80%	
14	183	5.773	114,3	80%	183,2	5.933	114,3	80%		173,9	6.009	111,2	80%		165,1	6.083	108,2	80%	
15	203	5.924	117,9	80%	203,4	6.083	117,9	80%		193,4	6.156	115,1	80%		183,9	6.229	109,2	80%	
16	226	6.087	121,3	80%	225,8	6.244	121,3	80%		215,1	6.315	118,9	80%		204,9	6.386	113,0	80%	
17	251	6.262	124,6	80%	250,7	6.418	124,6	80%		239,2	6.486	118,6	80%		228,3	6.556	116,0	80%	
18	278	6.450	127,5	80%	278,4	6.606	127,5	80%		266,1	6.671	121,6	80%		254,3	6.739	120,1	80%	
19	309	6.653	130,0	80%	309,1	6.807	130,0	80%		295,9	6.888	124,1	80%		283,4	6.936	123,2	80%	
20	343	6.870	131,8	70%	343,1	7.022	131,8	70%		329,1	7.081	131,4	80%		315,7	7.147	125,8	80%	
21	381	7.103	139,0	70%	381	7.253	139,0	70%		366,1	7.311	133,2	70%		351,7	7.375	127,7	70%	
22	423	7.352	139,7	65%	423	7.501	139,7	70%		407,1	7.555	140,5	70%		391,9	7.619	135,0	70%	
23	470	7.617	145,5	65%	469,6	7.764	145,5	65%		452,8	7.817	141,0	65%		436,7	7.881	135,7	70%	
24	521	7.900	153,5	60%	521,4	8.045	153,5	60%		503,6	8.097	147,9	65%		486,4	8.160	142,6	65%	
25	579	8.200	161,5	55%	578,9	8.340	160,4	60%		556,3	8.390	154,8	60%		542	8.453	150,6	60%	
26	643	8.517	157	55%	642,7	8.660		55%		623	8.710	161,8	55%		603,8	8.775	155,6	60%	
27	714	8.853	163,0	50%	713,6	8.994	163,0	50%		692,9	9.045	168,5	55%		672,7	9.111	163,3	55%	
28	792	9.206	180,1	50%	792,3	9.346	180,1	50%		770,6	9.398	174,9	50%		749,5	9.466	169,8	50%	
29	880	9.576	185,8	45%	879,6	9.715	185,8	45%		857	9.769	180,7	50%		835	9.841	175,8	50%	
30	977	9.962	190,8	45%	976,6	10.101	190,8	45%		953,2	10.158	186,0	45%		930,3	10.234	181,2	45%	
31	1084	10.364	194,9	40%	1084,3	10.502	194,9	40%		1060,1	10.563	190,3	45%		1036,5	10.645	185,8	45%	
32	1204	10.782	215,7	40%	1203,9	10.921	215,7	40%		1179,1	10.987	211,0	40%		1154,8	11.074	206,3	40%	
33	1337	11.213	218,9	35%	1336,6	11.352	218,9	40%		1311,4	11.425	214,5	40%		1286,6	11.519	210,2	40%	
34	1484	11.658	242,4	35%	1484	11.799	242,4	35%		1458,5	11.877	237,9	35%		1433,4	11.979	233,5	35%	
35	1646	12.119	247,3	35%	1647,2	12.356	247,3	35%		1624,1	12.421	243,6	35%		1600,2	12.493	240,3	35%	
36	1829	12.582	270,3	35%	1829,3	12.726	270,3	35%		1804,1	12.821	264,3	35%		1779,3	12.941	262,6	35%	
37	2031	13.058	296,6	30%	2031,1	13.204	296,6	30%		2006,5	13.308	295,3	30%		1982,3	13.439	262,7	35%	
38	2255	13.542	298,9	30%	2255	13.691	298,9	30%		2231,7	13.806	295,7	30%		2208,5	13.948	292,2	30%	
39	2504	14.033	331,3	30%	2503,7	14.184	331,3	30%		2482	14.310	328,2	30%		2460,4	14.463	325,1	30%	
40	2780	14.526	367,3	25%	2779,7	14.680	367,3	25%		2760,5	14.817	364,5	25%		2741,4	14.981	361,7	25%	
41	3086	15.018	407,3	25%	3086,2	15.175	407,3	25%		3070,2	15.323	404,9	25%		3054,3	15.501	357,8	25%	
42	3427	15.504	451,7	20%	3426,5	15.684	451,7	20%		3414,7	15.823	399,9	20%		3402,8	16.013	398,2	20%	
43	3804	15.981	501,0	20%	3804,4	16.144	501,0	20%		3797,8	16.315	443,7	15%		3791,2	16.516	443,3	15%	
44	4224	16.439	494,0	0%	4223,9	16.606	494,0	0%		4223,9	16.789	493,7	0%		4223,9	17.002	493,4	0%	
45	7.0E+04	2.03E+03	45	20%	6.95E+04	2.03E+03	45	20%		6.95E+04	2.03E+03	45	20%		5.1E+04	2.03E+03	45	20%	
46	1.4E+06	26.13E+04	6.2E+04	45	1.1E+06	25.112	4.7E+04	45		9.2E+05	25.959	3.6E+04	45		8.2E+05	26.003	3.7E+04	45	
47	2.6E+07	29.011	7.6E+05	70%	1.7E+07	29.024	5.0E+05	70%		1.1E+07	28.993	5.0E+05	80%		7.5E+06	28.949	3.3E+04	80%	
48	4.8E+08	31.026	1.4E+07	100%	2.8E+08	31.100	8.0E+06	100%		1.6E+08	31.122	4.6E+06	100%		9.1E+07	31.124	2.6E+06	100%	
49	8.9E+09	32.451	1.3E+08	100%	4.4E+09	32.585	6.4E+07	100%		2.2E+09	32.666	6.4E+07	100%		1.1E+09	32.725	3.2E+07	100%	

Apêndice VI – Estrutura e exemplo dos arquivos de entrada e saída de dados do otimizador

Idade: 48 anos					Idade: 47 anos					Idade: 46 anos					Idade: 45 anos				
j	W_{ij}	$f_i(W_{ij})$	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima	W_{ij}	$f_i(W_{ij})$	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima		W_{ij}	$f_i(W_{ij})$	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima		W_{ij}	$f_i(W_{ij})$	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima	
0	1	3,986	32,2	65%	1	4,056	30,2	60%		1	4,121	28,3	60%		1	4,179	26,5	55%	
1	2	4,034	33,5	65%	2,3	4,107	31,5	60%		2,2	4,171	29,5	60%		2,2	4,233	27,7	55%	
2	5	4,132	36,4	65%	5,1	4,209	34,3	60%		5	4,279	32,3	60%		4,8	4,339	30,3	55%	
3	12	4,326	43,1	65%	11,5	4,404	40,7	60%		11	4,474	38,3	60%		10,6	4,539	36,1	55%	
4	27	4,652	58,5	65%	25,9	4,727	55,1	60%		24,5	4,795	51,8	60%		23,2	4,856	48,7	55%	
5	62	5,135	80,1	70%	58,3	5,200	74,8	65%		54,5	5,261	69,9	65%		50,9	5,314	66,4	60%	
6	70	5,216	83,2	70%	65,1	5,282	77,9	65%		60,9	5,343	72,8	65%		57,1	5,399	69,4	60%	
7	78	5,302	86,7	70%	72,7	5,369	81,2	65%		68,1	5,430	76,0	65%		63,9	5,486	71,3	60%	
8	86	5,393	89,6	70%	81,1	5,460	84,7	65%		76,2	5,523	79,5	65%		71,6	5,580	74,6	60%	
9	95	5,490	92,4	70%	90,5	5,557	88,5	70%		85,2	5,621	83,1	65%		80,2	5,679	78,1	60%	
10	107	5,592	96,2	70%	101	5,680	90,5	70%		95,2	5,725	87,0	65%		89,8	5,764	81,9	60%	
11	119	5,703	98,3	70%	112,7	5,770	94,6	70%		106,5	5,836	89,2	70%		100,5	5,886	84,0	65%	
12	133	5,820	102,4	80%	125,8	5,888	96,6	70%		119	5,954	93,3	70%		112,6	6,016	88,1	65%	
13	148	5,947	104,0	80%	140,4	6,015	100,8	70%		133,1	6,082	95,3	70%		126,1	6,145	90,1	70%	
14	165	6,083	108,2	80%	156,7	6,150	102,4	80%		148,8	6,219	99,6	70%		141,2	6,282	94,3	70%	
15	184	6,229	109,2	80%	174,9	6,297	106,5	80%		166,3	6,365	101,0	70%		158,2	6,431	95,9	70%	
16	205	6,386	113,0	80%	195,2	6,454	107,4	80%		185,9	6,523	105,1	70%		177,1	6,589	99,9	70%	
17	228	6,556	116,6	80%	217,8	6,623	111,0	80%		207,9	6,693	105,7	80%		198,4	6,761	103,9	70%	
18	254	6,739	120,1	80%	243,1	6,805	114,5	80%		232,4	6,876	109,2	80%		222,2	6,945	104,2	70%	
19	283	6,936	123,2	80%	271,3	7,001	117,6	80%		259,8	7,073	112,4	80%		248,8	7,143	107,4	70%	
20	316	7,147	125,8	80%	302,8	7,213	120,3	80%		290,5	7,285	115,2	80%		278,6	7,357	110,2	70%	
21	352	7,375	127,7	70%	338	7,440	127,8	70%		324,8	7,514	122,5	70%		312,1	7,588	117,5	70%	
22	392	7,619	135,0	70%	377,2	7,685	139,6	70%		363,1	7,759	124,5	70%		349,5	7,835	119,6	70%	
23	437	7,881	135,7	70%	421	7,947	130,6	70%		405,9	8,022	126,6	70%		391,4	8,101	120,9	70%	
24	486	8,180	142,6	65%	469,9	8,227	137,5	65%		453,8	8,305	132,5	65%		438,4	8,386	127,8	65%	
25	542	8,458	149,6	60%	524,4	8,526	144,5	65%		507,4	8,606	139,5	65%		490,9	8,690	134,8	65%	
26	604	8,775	156,5	60%	585,2	8,845	151,4	60%		567,3	8,928	146,6	60%		549,8	9,016	141,8	60%	
27	673	9,111	163,3	55%	653,2	9,183	158,3	55%		634,2	9,270	143,9	55%		615,8	9,362	139,5	60%	
28	750	9,466	169,8	50%	729	9,542	164,9	55%		709	9,633	160,1	55%		689,6	9,730	145,2	55%	
29	835	9,841	175,8	50%	813,6	9,921	171,1	50%		792,7	10,017	166,4	50%		772,3	10,119	161,9	50%	
30	930	10,234	181,2	45%	908	10,319	176,6	45%		886,2	10,421	172,2	50%		865	10,530	167,9	50%	
31	1037	10,645	185,8	45%	1013,4	10,736	181,4	45%		990,8	10,845	177,1	45%		968,7	10,961	173,0	45%	
32	1155	11,074	206,3	40%	1131	11,171	201,9	40%		1107,7	11,287	181,0	40%		1084,9	11,412	177,1	45%	
33	1287	11,519	210,2	40%	1262,3	11,624	206,0	40%		1238,4	11,749	201,9	40%		1215	11,882	197,8	40%	
34	1433	11,979	233,6	40%	1408,8	12,092	205,5	40%		1384,5	12,226	204,7	40%		1360,7	12,370	201,0	40%	
35	1597	12,454	236,1	35%	1572,3	12,577	222,4	35%		1547,9	12,721	228,4	35%		1523,9	12,874	224,6	35%	
36	1779	12,941	262,5	35%	1754,7	13,073	259,6	35%		1730,5	13,228	229,4	35%		1706,7	13,394	226,0	35%	
37	1982	13,439	262,7	35%	1959,4	13,583	259,3	35%		1934,7	13,750	256,0	35%		1911,4	13,927	252,7	35%	
38	2209	13,948	292,2	30%	2185,7	14,103	289,0	30%		2163	14,281	285,8	30%		2140,6	14,468	282,6	30%	
39	2461	14,463	325,1	30%	2439,3	14,628	322,1	30%		2418,3	14,819	283,6	30%		2397,4	15,021	281,0	30%	
40	2741	14,981	361,7	25%	2722,5	15,160	319,1	25%		2703,6	15,363	316,7	25%		2684,9	15,577	314,3	25%	
41	3054	15,501	357,8	25%	3038,4	15,691	355,7	25%		3022,6	15,908	353,7	25%		3007	16,134	351,7	25%	
42	3403	16,013	398,2	20%	3391,1	16,215	396,6	20%		3379,3	16,444	395,1	20%		3367,6	16,683	393,5	20%	
43	3791	16,516	443,3	15%	3784,6	16,730	442,3	20%		3778,1	16,971	441,3	20%		3771,5	17,220	440,3	20%	
44	4224	17,002	493,4	0%	4223,9	17,226	493,2	0%		4223,9	17,476	493,0	0%		4223,9	17,735	492,8	0%	
45	5,1E+04	22,053	3,0E+03	20%	4,5E+04	22,064	2,6E+03	20%		3,9E+04	22,091	2,3E+03	20%		3,4E+04	22,116	2,5E+03	25%	
46	6,2E+05	26,003	2,7E+04	45%	4,7E+05	25,924	2,0E+04	45%		3,6E+05	25,849	2,1E+04	50%		2,7E+05	25,755	1,6E+04	50%	
47	7,5E+06	28,949	3,3E+05	80%	5,0E+06	28,867	2,2E+05	80%		3,3E+06	28,774	1,4E+05	80%		2,2E+06	28,646	9,4E+04	80%	
48	9,1E+07	31,124	2,6E+06	100%	5,2E+07	31,077	1,5E+06	100%		3,0E+07	31,011	8,7E+05	100%		1,7E+07	30,900	7,5E+05	100%	
49	1,1E+09	32,725	3,2E+07	100%	5,5E+08	32,731	1,6E+07	100%		2,8E+08	32,715	8,0E+06	100%		1,4E+08	32,645	4,0E+06	100%	

Idade: 44 anos					Idade: 43 anos					Idade: 42 anos					Idade: 41 anos				
j	W_{ij}	$f_i(W_{ij})$	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima	W_{ij}	$f_i(W_{ij})$	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima		W_{ij}	$f_i(W_{ij})$	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima		W_{ij}	$f_i(W_{ij})$	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima	
0	1	4,235	24,8	55%	1	4,285	23,3	55%		1	4,331	21,8	55%		1	4,377	20,4	55%	
1	2	4,292	26,0	55%	2,1	4,341	24,4	55%		2,1	4,390	22,9	55%		2,1	4,440	21,5	55%	
2	5	4,400	28,5	55%	4,6	4,456	26,9	55%		4,4	4,503	25,2	55%		4,3	4,555	23,7	55%	
3	10	4,601	34,0	55%	9,8	4,657	32,1	55%		9,4	4,708	30,2	55%		9	4,759	28,4	55%	
4	22	4,916	45,8	55%	20,8	4,968	43,1	55%		19,7	5,017	40,5	55%		18,7	5,067	38,1	55%	
5	48	5,366	62,1	60%	44,5	5,413	58,1	60%		41,6	5,455	54,3	60%		38,9	5,498	50,7	55%	
6	53	5,451	64,9	60%	50	5,498	60,7	60%		46,8	5,541	56,8	55%		43,8	5,585	53,2	55%	
7	60	5,540	68,0	60%	56,2	5,589	63,7	60%		52,7	5,633	59,7	55%		49,4	5,678	55,9	55%	
8	67	5,635	69,9	60%	63,2	5,686	65,7	60%		59,3	5,730	61,5	60%		55,7	5,777	57,7	55%	
9	75	5,735	73,4	60%	71	5,787	69,0	60%		66,8	5,834	64,8	60%		62,9	5,884	60,9	60%	
10	85	5,842	77,0	60%	79,8	5,896	72,5	60%		75,2	5,944	68,2	60%		70,9	5,995	64,2	60%	
11	95	5,956	79,2	65%	89,7	6,011	74,7	60%		84,7	6,062	70,4	60%		80	6,115	66,3	60%	
12	107	6,077	83,1	65%	100,8	6,135	78,5	65%		95,3	6,187	74,1	65%		90,2	6,243	68,4	60%	
13	120	6,208	85,2	65%	113,2	6,266	80,5	65%		107,3	6,322	76,2	65%		101,7	6,379	72,0	60%	
14	134	6,348	89,3	65%	127,3	6,409	84,6	65%		120,8	6,466	78,0	65%		114,7	6,527	73,9	65%	
15	150	6,497	90,9	70%	143	6,561	86,3	65%		136	6,621	81,9	65%		129,3	6,684	77,6	65%	
16	169	6,658	94,9	70%	160,7	6,724	90,2	70%		153,1	6,787	85,7	65%		145,8	6,853	79,1	65%	
17	189	6,832	98,9	70%	180,6	6,900	94,1	70%		172,4	6,967	86,9	70%		164,5	7,037	82,7	65%	
18	212	7,019	99,3	70%	203	7,090	94,7	70%		194	7,159	90,3	70%		185,5	7,233	86,2	65%	
19	238	7,219	102,6	70%	228,1	7,293	98,0	70%		218,4	7,366	93,7	70%		209,2	7,445	89,5	70%	
20	267	7,436	105,7	70%	256,4	7,513	101,0	70%		245,9	7,589	96,7	70%		235,9	7,672	92,6	70%	
21	300	7,669	112,7	70%	288,1	7,749	108,0	70%		276,9	7,830	99,3	70%		266	7,917	95,2	65%	
22	336	7,919	114,9	70%	323,8	8,004	110,4	70%		311,7	8,088	106,1	70%		300	8,180	97,3	65%	
23	377	8,188	116,4	70%	363,9	8,277	112,0	70%		350,9	8,366	107,8	65%		338,3	8,464	103,8	65%	
24	423	8,477	123,2	65%	409	8,570	118,0	65%		395	8,664	114,6	65%		381,6	8,768	104,7	65%	
25	478	8,786	130,3	65%	459	8,883	124,0	65%		444,7	8,977	120,3	65%		429,3	9,082	111,9	60%	
26	533	9,116	129,2	60%	516,5	9,219	125,0	60%		500,6	9,324	121,0	60%		485,3	9,442	117,1	60%	
27	598	9,468	136,2	60%	580,5	9,576	131,1	60%		563,6	9,689	127,1	55%		547,2	9,813	123,3	55%	
28	671	9,841	141,0	55%	652,4	9,957	137,0	55%		634,5	10,076	133,0	55%		617,1	10,208	129,2	55%	
29	753	10,237	146,3	50%	732,2	10,360	142,4	50%		714,3	10,487	138,6	50%		696	10,628	134,9	50%	
30	844	10,655	163,6	50%	823,9	10,785	147,2	50%		804,2	10,921	143,6	50%		784,9	11,071	140,0	50%	
31	947	11,096	168,9	45%	926	11,233	165,0	45%		905,3	11,377	161,1	45%		885,1	11,537	144,3	45%	
32	1063	11,555	173,3	45%	1040,6	11,703	169,5	45%		1019,2	11,857	165,9	45%		998,2	12,027	162,3	45%	
33	1192	12,034	193,9	40%	1169,5	12,193	172,8	40%		1147,4	12,358	169,4	40%		1125,7	12,540	186,0	40%	
34	1337	12,533	197,3	40%	1314,3	12,702	193,8	40%		1291,7	12,878	193,3	40%		1269,5	13,071	186,9	40%	
35	1501	13,040	221,0	35%	1477,9	13,217	217,7	35%		1454,2	13,378	212,8	35%		1431,7	13,604	214,8	35%	
36	1683	13,580	222,3	35%	1660	13,773	219,1	35%		1637,1	13,973	216,3	35%		1614,5	14,191	213,2	35%	
37	1888	14,124	249,5	35%	1865,5	14,329	246,3	35%		1843	14,541	216,2	35%		1820,8	14,775	213,4	35%	
38	2119	14,679	248,5	30%	2096,5	14,898	245,3	30%		2074,5	15,124	243,1	30%		2053,3	15,370	240,4	30%	
39	2377	15,245	278,4	30%	2356,2	15,477	275,9	30%		2335,8	15,715	273,3	30%		2315,6	15,974	270,8	30%	
40	2666	15,815	312,0	25%	2647,9	16,059	309,7	25%		2629,6	16,310	307,4	25%		2611,4	16,582	267,2	25%	
41	2991	16,384	349,7	25%	2975,9	16,641	347,7	25%		2960,4	16,904	302,5	25%		2945	17,190	300,8	25%	
42	3356	16,945	391,9	20%	3344,3	17,213	390,4	20%		3332,7	17,488	343,3	20%		3321,2	17,786	339,0	20%	
43	3765	17,494	439,4	20%	3758,4	17,773	438,4	20%		3751,9	18,058	382,0	20%		3745,4	18,367	382,0	20%	
44	4228	18,018	492,6	0%	4223,9	18,308	492,4	5%		4213,9	18,607	430,7	0%		4223,9	18,929	430,8	0%	
45	2,0E+04	2,1E+04	25%	22,013	2,2E+04	22,013	25%		2,2E+04	22,243	1,6E+03	26%		2,3E+04	22,392	1,7E+03	25%		
46	2,0E+05	2,5E+07	2,0E+04	5%	1,8E+05	2,5E+07	9,5E+03	50%		3,2E+05	4,3E+05	63%		5,8E+04	2,3E+07	6,5E+03	60%		
47	1,4E+06	28,511	8,3E+04	90%	9,4E+05	28,342	5,0E+04	80%		6,2E+05	28,241	3,6E+04	80%		4,1E+05	27,931	2,4E+04	80%	
48	9,9E+06	30,771	4,3E+05	100%	5,7E+06	30,593	2,5E+05	100%		3,3E+06	30,369	1,9E+05	90%		1,9E+06	30,125	1,1E+05	90%	
49	6,9E+07	32,549	3,0E+06	100%	3,5E+07	32,399	1,5E+06	90%		1,7E+07	32,191	7,5E+05	90%		8,7E+06	31,963	5,0E+05	80%	

Apêndice VI – Estrutura e exemplo dos arquivos de entrada e saída de dados do otimizador

Idade: 41 anos						Idade: 40 anos						Idade: 39 anos						Idade: 38 anos					
j	W_{ij}	f_i	$f_i(W_{ij})$	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima	W_{ij}	f_i	$f_i(W_{ij})$	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima	W_{ij}	f_i	$f_i(W_{ij})$	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima	W_{ij}	f_i	$f_i(W_{ij})$	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima			
0	1	4,377	20,4	55%		1	4,422	19,2	55%		1	4,465	18,0	55%		1	4,504	16,9	55%				
1	2	4,440	21,5	55%		2,1	4,490	20,3	55%		2	4,530	19,0	55%		2	4,573	17,9	55%				
2	4	4,555	23,7	55%		4,2	4,605	22,4	55%		4,1	4,653	21,1	55%		4	4,698	19,9	55%				
3	9	4,759	26,4	55%		8,6	4,807	26,8	55%		8,3	4,857	25,3	55%		8	4,903	23,9	55%				
4	19	5,067	38,1	55%		17,7	5,115	36,9	55%		16,8	5,160	33,8	55%		15,9	5,201	31,8	55%				
5	39	5,498	50,7	55%		36,3	5,537	47,4	55%		33,9	5,575	44,3	55%		31,7	5,610	41,4	55%				
6	44	5,585	53,2	55%		41	5,626	49,7	55%		38,4	5,666	46,6	55%		36	5,703	43,6	55%				
7	49	5,678	55,9	55%		46,4	5,723	52,4	55%		43,5	5,763	49,1	55%		40,8	5,800	46,0	55%				
8	56	5,777	57,7	55%		52,4	5,823	54,2	55%		49,2	5,865	50,9	55%		46,2	5,903	47,7	55%				
9	63	5,884	60,9	60%		59,2	5,930	57,2	55%		55,7	5,974	53,7	55%		52,4	6,014	50,5	55%				
10	71	5,995	64,2	60%		66,6	6,043	60,4	60%		63	6,089	56,7	60%		59,4	6,131	52,4	60%				
11	80	6,115	66,3	60%		75,5	6,165	62,5	60%		71,3	6,213	59,9	60%		67,3	6,257	55,5	60%				
12	90	6,243	68,4	60%		85,3	6,295	64,5	60%		80,7	6,346	60,9	60%		75,3	6,392	57,5	60%				
13	102	6,379	72,0	60%		96,4	6,435	68,1	60%		91,3	6,488	62,8	60%		86,5	6,538	59,4	60%				
14	115	6,527	73,9	65%		108,9	6,585	70,0	60%		103,3	6,641	66,3	60%		98,1	6,694	62,8	60%				
15	129	6,684	77,6	65%		123	6,746	73,7	65%		116,9	6,805	68,0	65%		111,2	6,862	64,5	60%				
16	146	6,853	79,1	65%		138,9	6,919	75,2	65%		132,3	6,982	71,4	65%		126,1	7,044	67,9	65%				
17	165	7,037	82,7	65%		156,9	7,105	78,7	65%		149,8	7,173	75,0	65%		142,9	7,238	69,1	65%				
18	186	7,233	86,2	65%		177,3	7,306	82,2	65%		169,5	7,378	75,7	65%		162	7,448	72,2	65%				
19	209	7,445	89,5	70%		200,3	7,522	85,5	65%		191,8	7,599	78,7	65%		183,7	7,674	75,3	65%				
20	236	7,672	92,6	70%		226,3	7,755	88,6	65%		217	7,836	84,8	65%		208,2	7,917	78,0	65%				
21	266	7,917	95,2	65%		255,6	8,005	91,3	65%		245,6	8,092	87,6	65%		236	8,178	80,4	65%				
22	300	8,180	97,3	65%		288,8	8,274	93,5	65%		278	8,368	89,8	65%		267,6	8,461	86,3	65%				
23	338	8,464	103,8	65%		326,2	8,563	99,9	65%		314,6	8,663	91,4	65%		303,3	8,763	88,0	60%				
24	382	8,768	104,7	65%		368,5	8,873	100,9	65%		356	8,980	97,4	60%		343,8	9,087	93,9	60%				
25	430	9,093	110,9	60%		416,3	9,206	107,1	60%		402,8	9,320	103,5	60%		389,8	9,435	100,0	60%				
26	485	9,442	117,1	60%		470,3	9,561	113,3	60%		455,9	9,683	109,7	60%		441,9	9,806	99,6	55%				
27	547	9,813	123,3	55%		531,3	9,940	119,5	55%		515,9	10,071	108,2	55%		500,9	10,203	104,9	55%				
28	617	10,208	129,2	55%		600,2	10,344	125,5	55%		583,8	10,483	113,3	55%		567,8	10,624	110,0	50%				
29	696	10,628	134,9	50%		678,1	10,773	131,3	50%		660,7	10,921	127,8	50%		643,7	11,072	114,8	50%				
30	785	11,071	140,0	50%		766	11,225	136,5	50%		747,7	11,385	133,1	50%		729,7	11,546	129,7	50%				
31	885	11,537	144,3	45%		865,4	11,703	140,9	45%		846,1	11,873	137,7	45%		827,2	12,045	134,5	45%				
32	998	12,027	162,3	45%		977,6	12,203	158,8	45%		957,5	12,384	141,3	45%		937,8	12,570	139,3	45%				
33	1126	12,540	166,0	40%		1104,4	12,727	162,8	40%		1083,5	12,920	159,6	40%		1063,1	13,116	156,5	40%				
34	1270	13,071	186,9	40%		1247,7	13,272	185,2	40%		1226,2	13,477	182,2	40%		1205,1	13,687	159,3	40%				
35	1432	13,624	199,4	35%		1409,5	13,836	196,3	35%		1387,6	14,054	189,3	35%		1366,1	14,276	180,3	35%				
36	1615	14,191	213,2	35%		1592,3	14,416	198,6	35%		1570,3	14,648	184,1	35%		1548,7	14,884	181,5	35%				
37	1821	14,775	213,4	35%		1798,8	15,014	210,8	35%		1777,1	15,259	208,1	35%		1755,6	15,508	205,5	30%				
38	2053	15,370	240,4	30%		2032,1	15,623	237,8	30%		2011	15,880	235,2	30%		1990,2	16,142	232,7	30%				
39	2316	15,974	270,8	30%		2295,6	16,239	268,4	30%		2275,8	16,510	232,7	30%		2256,2	16,787	230,6	30%				
40	2611	16,582	267,0	25%		2593,4	16,862	265,0	25%		2575,4	17,146	263,1	25%		2557,6	17,436	261,2	25%				
41	2945	17,190	300,8	25%		2929,7	17,482	299,1	20%		2914,5	17,779	297,5	20%		2899,4	18,081	295,8	20%				
42	3321	17,786	339,0	20%		3309,7	18,089	337,7	20%		3298,2	18,398	336,4	20%		3286,8	18,710	335,1	20%				
43	3745	18,367	382,0	20%		3738,9	18,682	381,2	20%		3732,5	19,002	380,5	20%		3726	19,324	379,7	20%				
44	4224	18,929	430,6	0%		4223,9	19,256	430,4	0%		4223,9	19,586	430,3	0%		4223,9	19,917	430,2	0%				
45	1,9E+04	22,322	1,7E+03	25%		1,7E+04	22,361	1,5E+03	25%		1,5E+04	22,417	1,3E+03	25%		1,3E+04	22,471	1,3E+03	30%				
46	8,9E+04	25,322	6,5E+03	55%		6,8E+04	25,191	4,9E+03	55%		5,1E+04	25,044	4,5E+03	55%		3,9E+04	24,882	3,4E+03	70%				
47	4,1E+05	27,931	2,4E+04	80%		2,7E+05	27,888	2,0E+04	80%		1,8E+05	27,410	1,3E+04	80%		1,2E+05	27,095	1,0E+04	90%				
48	1,9E+06	30,125	1,1E+05	90%		1,1E+06	29,629	6,3E+04	80%		6,2E+05	29,463	4,5E+04	100%		3,6E+05	29,081	2,6E+04	90%				
49	6,7E+06	31,953	5,0E+05	80%		4,3E+06	31,652	2,5E+05	100%		2,2E+06	31,283	1,6E+05	90%		1,1E+06	30,842	7,8E+04	80%				

Idade: 37 anos						Idade: 36 anos						Idade: 35 anos						Idade: 34 anos					
j	W_{ij}	f_i	Consumo	Otimo	Aloc. Ótima	W_{ij}	f_i	Consumo	Otimo	Aloc. Ótima	W_{ij}	f_i	Consumo	Otimo	Aloc. Ótima	W_{ij}	f_i	Consumo	Otimo	Aloc. Ótima			
0	1	4,544	15,8	55%		1	4,584	14,9	55%		1	4,621	14,0	55%		1	4,655	13,1	55%				
1	2	4,617	16,8	55%		1,9	4,654	15,8	55%		1,9	4,695	14,9	55%		1,9	4,735	14,0	55%				
2	4	4,742	18,7	55%		3,8	4,787	17,7	55%		3,7	4,828	16,7	55%		3,6	4,868	15,7	55%				
3	8	4,943	22,4	55%		7,3	4,988	21,2	55%		7	5,029	20,0	55%		6,8	5,073	18,9	55%				
4	15	5,244	29,9	55%		14,3	5,285	28,2	55%		13,5	5,322	26,5	55%		12,8	5,368	24,9	55%				
5	30	5,646	38,7	55%		27,7	5,679	36,2	55%		25,9	5,711	33,8	55%		24,2	5,739	31,6	55%				
6	34	5,739	40,8	55%		31,5	5,773	38,1	55%		29,5	5,806	36,7	55%		27,6	5,836	34,4	55%				
7	38	5,836	42,3	55%		35,9	5,875	39,7	55%		33,6	5,908	37,1	55%		31,5	5,939	34,8	55%				
8	43	5,942	44,7	55%		40,8	5,981	42,0	55%		38,3	6,016	39,4	55%		36	6,051	37,0	55%				
9	49	6,055	47,4	55%		46,4	6,095	43,7	55%		43,7	6,134	41,1	55%		41,1	6,169	38,6	55%				
10	56	6,175	49,3	60%		52,8	6,218	46,4	60%		49,8	6,258	43,7	60%		46,9	6,294	40,2	60%				
11	64	6,303	51,2	60%		60,1	6,349	48,3	60%		56,7	6,390	45,5	60%		53,6	6,431	42,9	60%				
12	72	6,441	54,3	60%		68,3	6,489	50,0	60%		64,5	6,534	47,2	60%		61,1	6,576	44,6	60%				
13	82	6,590	56,2	60%		77,7	6,641	53,1	60%		73,6	6,688	49,0	60%		69,8	6,735	46,3	60%				
14	93	6,749	57,9	60%		88,4	6,804	54,9	60%		83,9	6,855	52,0	60%		79,7	6,906	47,9	60%				
15	106	6,922	61,2	60%		100,6	6,980	56,5	60%		95,6	7,035	53,5	60%		90,9	7,088	50,8	60%				
16	120	7,106	62,6	65%		114,7	7,169	59,0	60%		107	7,229	56,6	60%		103,8	7,287	52,1	60%				
17	136	7,306	65,8	65%		130,1	7,373	62,6	65%		124,2	7,438	57,7	60%		118,5	7,502	54,9	60%				
18	155	7,521	68,9	65%		148	7,593	65,7	65%		141,5	7,664	60,5	60%		135,3	7,733	57,7	60%				
19	176	7,753	71,9	65%		168,4	7,831	68,7	65%		161,3	7,908	63,2	60%		154,4	7,982	60,4	60%				
20	200	8,002	74,7	65%		191,6	8,087	71,5	60%		183,8	8,170	65,7	60%		176,3	8,252	62,9	60%				
21	227	8,270	77,1	65%		217,9	8,362	74,0	60%		209,4	8,452	71,0	60%		201,2	8,541	65,0	60%				
22	258	8,588	83,0	60%		247,9	8,658	75,9	60%		238,6	8,756	73,0	60%		229,7	8,853	70,2	60%				
23	293	8,969	84,7	60%		282	8,976	81,5	60%		271,9	9,082	74,4	60%		262,2	9,188	71,6	60%				
24	332	9,201	90,6	60%		320,8	9,317	82,5	60%		309,8	9,432	79,6	55%		299,3	9,548	76,8	55%				
25	371	9,457	93,9	60%		358,9	9,582	87,9	65%		347,9	9,697	85,0	60%		336,5	9,807	82,1	60%				
26	428	9,939	96,4	55%		415,1	10,073	93,9	55%		402,3	10,207	90,4	55%		390	10,343	87,5	55%				
27	486	10,344	101,8	55%		472,2	10,498	98,7	55%		458,5	10,634	95,7	50%		445,2	10,781	86,2	50%				
28	552	10,777	106,9	50%		537,2	10,932	103,9	50%		522,5	11,088	101,0	50%		508,2	11,246	90,6	50%				
29	627	11,236	111,7	50%		611,1	11,402	108,8	50%		595,4	11,570	105,9	50%		580,1	11,739	103,1	45%				
30	712	11,720	116,0	45%		695,1	11,898	113,1	45%		678,4	12,078	110,3	45%		662,2	12,261	107,6	45%				
31	809	12,231	131,4	45%		790,7	12,421	116,7	45%		773,1	12,614	114,0	45%		755,9	12,810	111,4	45%				
32	918	12,768	135,3	40%		899,5	12,971	132,5	40%		881	13,176	129,6	40%		862,8	13,384	114,2	40%				
33	1043	13,268	138,1	40%		1023,3	13,545	135,4	40%		1003,9	13,764	132,7	40%		984,9	13,985	130,1	40%				
34	1184	13,912	155,5	40%		1164	14,141	153,7	40%		1144	14,373	151,0	35%		1124,3	14,608	151,8	35%				
35	1345	14,614	157,1	35%		1328,5	14,594	156,2	35%		1303,6	14,858	153,2	35%		1283,4	15,105	149,3	35%				
36	1527	15,137	178,9	30%		1506,3	15,395	176,3	30%		1485,5	15,654	173,8	30%		1465,1	15,918	171,7	30%				
37	1734	15,774	202,9	30%		1713,5	16,044	200,4	30%		1692,8	16,318	197,1	30%		1672,4	16,597	191,0	30%				
38	1970	16,422	201,4	30%		1949,2	16,708	199,2	30%		1929	16,998	193,1	30%		1909,1	17,288	195,0	30%				
39	2237	17,082	228,3	30%		2217,4	17,381	226,4	30%		2198,2	17,682	224,5	30%		2179,2	17,986	222,4	30%				
40	2540	17,744	259,3	25%		2522,4	18,055	257,4	25%		2504,9	18,369	255,5	25%		2487,6	18,684	253,7	25%				
41	2884	18,401	294,2	20%		2869,4	18,724	292,6	20%		2854,5	19,049	291,0	20%		2839,6	19,376	248,1	20%				
42	3275	19,041	333,20	20%		3264,1	19,375	332,6	20%		3252,8	19,710	331,4	20%		3241,5	20,046	330,2	20%				
43	3720	19,665	378,9	20%		3713,1	20,009	378,2	20%		3706,6	20,353	377,4	20%		3700,2	20,698	376,9	20%				
44	4224	20,268	430,1	0%		4223,9	20,630	430,0	0%		4223,9	20,972	429,9	0%		4223,9	21,324	429,8	0%				
45	4784	20,847	475,0	90%		4784,0	21,012	475,0	90%		4784,0	21,377	475,0	55%		4784,0	21,743	475,0	55%				
46	2,9E+04	24,725	3,0E+03	0%		2,2E+04	24,999	2,5E+03	0%		1,7E+04	24,353	1,7E+03	60%		1,3E+04	24,133	1,5E+03	60%				
47	7,8E+04	26,770	6,8E+03	0%		5,1E+04	26,999	4,5E+03	80%		3,4E+04	25,984	3,4E+03	60%		2,2E+04	25,516	2,6E+03	40%				
48	2,0E+05	28,642	1,8E+04	70%		1,2E+05	28,137	1,0E+04	60%		6,8E+04	27,556	6,9E+03	40%		3,9E+04	26,890	4,5E+03	20%				
49	5,4E+05	30,347	4,7E+04	60%		2,7E+05	29,757	2,4E+04	45%		1,4E+05	29,062	1,4E+04	20%		6,8E+04	28,229	5,9E+03	0%				

Apêndice VI – Estrutura e exemplo dos arquivos de entrada e saída de dados do otimizador

Idade: 34 anos					Idade: 33 anos					Idade: 32 anos					Idade: 31 anos				
j	W_{ij}	$f_i(W_{ij})$	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima	W_{ij}	$f_i(W_{ij})$	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima		W_{ij}	$f_i(W_{ij})$	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima		W_{ij}	$f_i(W_{ij})$	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima	
0	1	4,656	13,1	55%	1	4,691	12,3	55%		1	4,724	11,6	55%		1	4,757	10,9	55%	
1	2	4,736	14,0	55%	1,9	4,774	13,2	55%		1,8	4,804	12,4	55%		1,8	4,841	11,7	55%	
2	4	4,868	15,7	55%	3,5	4,906	14,8	55%		3,4	4,944	14,0	55%		3,3	4,980	13,2	55%	
3	7	5,073	18,9	55%	6,5	5,110	17,8	55%		6,2	5,145	16,8	55%		6	5,185	15,9	55%	
4	13	5,368	24,9	55%	12,1	5,392	23,4	55%		11,5	5,428	22,1	55%		10,9	5,461	20,8	55%	
5	24	5,739	31,6	55%	22,6	5,767	29,5	55%		21,1	5,792	27,6	55%		19,8	5,822	25,8	55%	
6	28	5,836	33,4	55%	25,9	5,867	31,3	55%		24,2	5,893	29,2	55%		22,7	5,922	26,9	55%	
7	32	5,939	34,8	55%	29,6	5,971	32,6	55%		27,7	5,999	30,5	55%		26	6,029	28,6	55%	
8	36	6,051	37,0	55%	33,8	6,062	34,7	55%		31,8	6,114	32,6	55%		29,9	6,146	30,6	55%	
9	41	6,169	38,6	55%	38,7	6,181	36,1	55%		36,4	6,235	34,1	55%		34,3	6,270	32,0	55%	
10	47	6,294	40,2	60%	44,2	6,300	37,3	60%		41,7	6,346	35,6	60%		39,3	6,402	33,5	60%	
11	54	6,431	42,9	60%	50,6	6,470	39,5	60%		47,8	6,508	37,3	60%		45,1	6,545	35,1	60%	
12	61	6,576	44,6	60%	57,8	6,618	42,1	60%		54,7	6,659	39,8	60%		51,8	6,701	36,7	60%	
13	70	6,735	46,3	60%	66,1	6,779	43,8	60%		62,7	6,824	40,4	60%		59,4	6,868	38,2	60%	
14	80	6,906	47,9	60%	75,6	6,953	45,4	60%		71,8	7,001	43,0	60%		68,1	7,049	39,6	60%	
15	91	7,088	50,8	60%	86,5	7,142	46,8	60%		82,2	7,192	44,4	60%		78,2	7,246	42,2	60%	
16	104	7,287	52,1	60%	98,9	7,345	49,6	60%		94,2	7,401	47,1	60%		89,7	7,458	43,4	60%	
17	119	7,502	54,9	60%	113,1	7,564	52,3	60%		107,9	7,625	48,1	60%		103	7,690	45,9	60%	
18	135	7,733	57,7	60%	129,3	7,801	55,1	60%		123,6	7,868	50,6	60%		118,1	7,938	48,3	60%	
19	154	7,982	60,4	60%	147,9	8,057	57,7	60%		141,6	8,131	53,0	60%		135,6	8,208	50,7	60%	
20	176	8,252	62,9	60%	169,1	8,333	60,2	60%		162,2	8,414	55,2	60%		155,6	8,500	51,8	60%	
21	201	8,541	65,0	60%	193,3	8,630	62,3	60%		185,8	8,720	59,8	60%		178,5	8,813	54,7	60%	
22	230	8,853	70,2	60%	221,1	8,951	64,1	60%		212,8	9,048	61,6	60%		204,8	9,150	59,2	60%	
23	262	9,188	71,6	60%	252,8	9,295	69,0	55%		243,8	9,401	66,4	55%		235	9,513	60,4	55%	
24	299	9,548	76,8	55%	289,1	9,663	69,7	55%		279,2	9,780	67,3	55%		269,7	9,903	64,9	55%	
25	342	9,931	82,1	55%	330,6	10,058	74,4	55%		319,8	10,185	71,9	55%		309,5	10,319	69,5	50%	
26	390	10,343	81,7	55%	378	10,480	79,1	50%		366,4	10,618	76,6	50%		355,1	10,763	74,1	50%	
27	445	10,781	86,2	50%	432,2	10,928	83,6	50%		419,7	11,079	81,1	50%		407,5	11,237	78,7	50%	
28	508	11,246	90,6	50%	494,2	11,405	88,0	50%		480,7	11,568	85,5	50%		467,6	11,740	83,1	45%	
29	580	11,739	103,1	45%	565,2	11,911	92,0	45%		550,7	12,087	89,6	45%		536,5	12,271	87,2	45%	
30	662	12,261	107,6	45%	646,3	12,445	104,9	45%		630,8	12,633	93,0	45%		615,6	12,832	90,7	45%	
31	756	12,810	111,4	45%	739	13,008	108,8	40%		722,5	13,208	106,3	40%		706,4	13,421	103,9	40%	
32	863	13,384	114,2	40%	845,1	13,596	111,8	40%		827,6	13,811	109,4	40%		810,6	14,039	107,1	40%	
33	985	13,985	130,1	40%	966,3	14,210	127,6	40%		948,1	14,439	125,1	40%		930,1	14,680	109,1	40%	
34	1124	14,608	131,8	35%	1105	14,848	129,5	35%		1085	15,092	127,2	35%		1067,3	15,348	125,0	35%	
35	1283	15,265	150,3	35%	1263,5	15,508	147,9	35%		1244	15,784	145,5	35%		1224,7	16,035	143,2	35%	
36	1465	15,918	171,4	35%	1444,9	16,184	147,8	35%		1425	16,455	145,7	35%		1405,3	16,741	143,7	35%	
37	1672	16,697	171,0	30%	1652,2	16,878	168,9	30%		1632,3	17,162	166,9	30%		1612,6	17,463	164,7	30%	
38	1908	17,288	195,0	30%	1889,3	17,583	192,9	30%		1869,7	17,879	190,8	30%		1850,4	18,192	188,8	30%	
39	2179	17,986	222,4	30%	2160,4	18,292	220,4	25%		2141,7	18,600	218,4	25%		2123,2	18,926	185,6	25%	
40	2488	18,684	253,7	25%	2470,4	19,002	215,9	25%		2453,3	19,323	214,3	25%		2436,4	19,662	212,8	25%	
41	2840	19,376	248,1	20%	2824,9	19,705	246,7	20%		2810,2	20,037	245,4	20%		2795,7	20,387	244,1	20%	
42	3242	20,046	330,2	20%	3230,3	20,384	282,0	20%		3219,1	20,723	280,9	20%		3207,9	21,081	279,9	20%	
43	3700	20,698	376,7	20%	3693,8	21,043	322,3	20%		3687,4	21,390	321,7	20%		3681	21,755	321,0	20%	
44	4224	21,324	429,8	0%	4223,9	21,675	429,7	0%		4223,9	22,026	429,7	0%		4223,9	22,397	368,2	0%	
45	7,4E+03	22,734	8,5E+02	50%	6,4E+03	22,780	7,4E+02	50%		5,6E+03	22,809	6,5E+02	40%		4,9E+03	22,827	5,6E+02	20%	
46	1,3E+04	24,133	1,5E+03	60%	9,7E+03	23,879	1,1E+03	40%		7,4E+03	23,688	9,6E+02	30%		5,6E+03	23,247	6,5E+02	10%	
47	2,2E+04	25,516	2,6E+03	40%	1,5E+04	24,993	1,7E+03	20%		9,7E+03	24,374	9,9E+02	5%		6,4E+03	23,650	7,4E+02	35%	
48	3,9E+04	26,890	4,5E+03	20%	2,2E+04	26,106	1,9E+03	0%		1,3E+04	25,116	1,3E+03	45%		7,4E+03	24,060	7,5E+02	5%	
49	6,8E+04	28,229	5,9E+03	0%	3,4E+04	27,110	2,9E+03	45%		1,7E+04	25,881	1,7E+03	40%		8,4E+03	24,461	9,8E+02	35%	

Idade: 30 anos					Idade: 29 anos					Idade: 28 anos					Idade: 27 anos				
j	W_{ij}	$f_i(W_{ij})$	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima	W_{ij}	$f_i(W_{ij})$	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima		W_{ij}	$f_i(W_{ij})$	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima		W_{ij}	$f_i(W_{ij})$	Consumo Ótimo	Aloc. Ótima	
0	1	4,790	10,2	55%	1	4,821	9,6	55%		1	4,857	9,1	55%		1	4,886	8,5	55%	
1	2	4,879	11,0	55%	1,8	4,915	10,4	55%		1,7	4,944	9,8	55%		1,7	4,978	9,2	55%	
2	3	5,016	12,4	55%	3,1	5,050	11,7	55%		3	5,087	11,1	55%		3	5,128	10,5	55%	
3	6	5,224	15,0	55%	5,5	5,253	14,1	55%		5,3	5,292	13,4	55%		5,1	5,325	12,6	55%	
4	10	5,492	19,5	55%	9,8	5,525	18,4	55%		9,2	5,553	17,3	55%		8,8	5,585	16,3	55%	
5	19	5,847	24,1	55%	17,3	5,870	22,6	55%		16,1	5,892	21,0	55%		15,1	5,915	19,7	55%	
6	21	5,947	25,2	55%	19,5	5,968	23,7	55%		18	5,974	21,9	55%		16,5	5,979	20,2	55%	
7	24	6,057	26,8	55%	22,1	6,055	25,0	55%		20	6,055	22,8	55%		18,1	6,050	21,2	55%	
8	28	6,173	28,1	55%	25	6,157	25,9	55%		22,2	6,139	23,7	55%		19,8	6,121	21,8	55%	
9	32	6,299	30,1	55%	28,2	6,263	27,2	55%		24,8	6,234	24,8	55%		21,7	6,197	22,5	55%	
10	37	6,437	31,6	60%	32	6,381	28,3	60%		27,6	6,330	25,9	55%		23,8	6,277	23,6	55%	
11	43	6,582	33,1	60%	36,1	6,501	29,9	60%		30,7	6,431	27,0	60%		26	6,367	24,3	55%	
12	49	6,741	34,6	60%	40,9	6,635	30,9	60%		34,1	6,537	28,1	60%		28,5	6,445	25,1	60%	
13	56	6,912	36,1	60%	46,2	6,775	32,6	60%		38	6,653	28,7	60%		31,2	6,535	25,9	60%	
14	65	7,097	37,6	60%	52,3	6,927	33,6	60%		42,3	6,775	30,0	60%		34,2	6,632	26,7	60%	
15	74	7,296	40,0	60%	59,2	7,091	35,4	60%		47,1	6,906	31,2	60%		37,4	6,732	27,4	60%	
16	85	7,514	41,2	60%	66,9	7,265	36,2	60%		52,4	7,043	32,5	60%		41	6,839	28,2	60%	
17	98	7,751	43,7	60%	75,7	7,453	37,9	60%		58,3	7,189	32,8	60%		44,9	6,951	28,9	60%	
18	113	8,007	46,1	60%	85,6	7,654	39,7	60%		64,9	7,345	33,9	60%		49,2	7,069	30,5	60%	
19	130	8,263	48,4	60%	96,8	7,870	41,4	60%		72,2	7,510	36,1	60%		53,8	7,191	31,2	60%	
20	149	8,582	50,6	60%	109,5	8,102	42,9	60%		80,4	7,688	37,2	60%		59	7,324	31,9	60%	
21	171	8,903	52,4	60%	123,9	8,351	44,2	60%		89,5	7,876	38,2	60%		64,6	7,462	32,5	60%	
22	197	9,251	53,9	55%	140,1	8,617	47,5	60%		100,6	8,075	39,1	60%		70,7	7,606	34,1	60%	
23	227	9,624	58,2	55%	158,5	8,902	48,5	55%		113,9	8,287	41,0	60%		77,5	7,761	34,6	60%	
24	260	10,023	62,6	55%	179,3	9,206	51,8	55%		123,4	8,512	42,4	60%		84,8	7,921	36,2	60%	
25	297	10,451	62,8	55%	202,9	9,452	52,9	55%		137,4	8,751	43,9	60%		92,9	8,081	36,5	60%	
26	344	10,908	66,6	50%	229,4	9,874	55,3	55%		152,2	9,003	46,7	55%		101,8	8,272	38,1	60%	
27	395	11,393	70,5	50%	259,5	10,241	58,4	50%		170,2	9,270	46,6	55%		111,5	8,460	39,7	60%	
28	455	11,909	80,7	45%	293,5	10,628	61,4	50%		189,4	9,552	48,7	55%		122,1	8,658	41,4	60%	
29	522	12,455	84,8	45%	332	11,039	64,3	50%		210,8	9,850	50,8	55%		133,7	8,865	41,0	60%	
30	600	13,029	88,4	45%	375,5	11,472	66,9	50%		234,7	10,165	52,9	50%		146,4	9,083	42,5	55%	
31	690	13,632	91,3	40%	424,7	11,928	75,4	45%		261,2	10,496	54,7	50%		160,4	9,313	43,9	55%	
32	793	14,264	104,8	40%	480,4	12,408	78,0	45%		290,7	10,843	60,7	50%		175,6	9,551	45,2	55%	
33	912	14,921	106,9	35%	543,4	12,911	80,1	45%		323,6	11,208	62,6	50%		192,3	9,802	49,3	55%	
34	1048	15,603	122,7	35%	616,4	13,495	90,4	40%		360,1	11,586	64,1	45%		210,5	10,065	50,7	55%	
35	1205	16,301	128,2	30%	699,2	14,151	93,3	40%		409,9	11,987	71,4	45%		230,7	10,357	57,7	55%	
36	1395	17,025	141,5	30%	786,4	14,551	103,8	40%		462,2	12,404	72,5	45%		252,7	10,626	52,9	50%	
37	1592	17,759	162,5	30%	889,5	15,139	104,2	35%		496,6	12,837	73,2	45%		276,7	10,923	57,8	50%	
38	1829	18,501	186,6	30%	1006,1	15,745	117,7	35%		552,7	13,288	81,4	40%		303,1	11,235	58,6	50%	
39	2103	19,249	183,7	25%	1138	16,366	116,4	35%		615,2	13,755	81,4	40%		331,9	11,557	59,1	45%	
40	2417	19,997	211,2	25%	1287,2	17,004	131,6	35%		684,8	14,239	90,5	40%		363,5	11,892	64,6	45%	
41	2778	20,731	242,5	20%	1456	17,653	148,7	30%		762,2	14,736	89,4	40%		398,1	12,240	68,4	45%	
42	3193	21,434	278,0	20%	1646,9	18,308	168,0	30%		848,4	15,251	98,4	35%		436	12,600	70,8	45%	
43	3671	22,114	320,1	20%	1862,8	18,970	162,8	30%		944,3	15,778	110,5	35%		477,5	12,972	70,4	40%	
44	4219	22,765	367,8	0%	2102	19,635	184,1	25%		1051	16,316	107,5	35%		523	13,357	77,0	40%	
45	4,2E+03	22,766	3,7E+02	0%	2,1E+03	19,636	1,8E+02	25%		1,1E+03	16,321	1,1E+02	35%		5,3E+02	13,365	7,7E+01	40%	
46	4,2E+03	22,766	3,7E+02	0%	2,1E+03	19,641	1,8E+02	25%		1,1E+03	16,326	1,1E+02	35%		5,3E+02	13,366	7,7E+01	40%	
47	4,2E+03	22,767	3,7E+02	0%	2,1E+03	19,643	1,8E+02	25%		1,1E+03	16,330	1,1E+02	35%		5,3E+02	13,367	7,7E+01	40%	
48	4,2E+03	22,768	3,7E+02	0%	2,1E+03	19,646	1,8E+02	25%		1,1E+03	16,335	1,1E+02	35%		5,3E+02	13,389	7,8E+01	40%	
49	4,2E+03	22,769	3,7E+02	0%	2,1E+03	19,648	1,8E+02	25%		1,1E+03	16,340	1,1E+02	35%		5,3E+02	13,397	7,8E+01	40%	

Apêndice VI – Estrutura e exemplo dos arquivos de entrada e saída de dados do otimizador

j	Idade: 27 anos					Idade: 26 anos					Idade: 25 anos					Idade: 24 anos				
	W_{ij}	$f_i(W_{ij})$	Consumo	Aloc.		W_{ij}	$f_i(W_{ij})$	Consumo	Aloc.		W_{ij}	$f_i(W_{ij})$	Consumo	Aloc.		W_{ij}	$f_i(W_{ij})$	Consumo	Aloc.	
0	1	4,886	8,5	55%		1	4,916	8,0	55%		1	4,942	7,6	55%		1	4,973	7,2	55%	
1	2	4,978	9,2	55%		1,7	5,013	8,7	55%		1,7	5,045	8,3	55%		1,7	5,081	7,9	55%	
2	3	5,128	10,5	55%		2,9	5,159	9,9	55%		2,8	5,186	9,4	55%		2,7	5,216	8,9	55%	
3	5	5,325	12,6	55%		4,9	5,267	11,9	55%		4,7	5,289	11,3	55%		4,5	5,315	10,7	55%	
4	9	5,595	16,3	55%		8,3	5,510	15,3	55%		7,9	5,637	14,5	55%		7,4	5,657	13,6	55%	
5	15	5,915	19,7	55%		14,1	5,934	18,4	55%		13,2	5,952	17,2	55%		12,3	5,968	16,1	55%	
6	17	5,979	20,2	55%		15,2	5,988	19,0	55%		14	5,994	17,6	55%		12,8	5,997	16,2	55%	
7	18	6,050	21,2	55%		16,4	6,046	19,4	55%		14,8	6,036	18,0	55%		13,4	6,030	16,5	55%	
8	20	6,121	21,8	55%		17,6	6,101	20,0	55%		15,7	6,081	18,4	55%		13,9	6,058	16,9	55%	
9	22	6,197	22,5	55%		19	6,162	20,8	55%		16,6	6,124	18,8	55%		14,5	6,090	17,1	55%	
10	24	6,277	23,6	55%		20,5	6,226	21,2	55%		17,6	6,172	19,3	55%		15,1	6,121	17,3	55%	
11	26	6,357	24,3	55%		22	6,287	21,9	55%		18,7	6,222	19,8	55%		15,7	6,152	17,8	55%	
12	29	6,445	25,1	60%		23,8	6,358	22,4	55%		19,8	6,271	20,3	55%		16,4	6,187	18,0	55%	
13	31	6,535	25,9	60%		25,6	6,426	23,2	60%		21	6,322	20,4	55%		17,1	6,222	18,2	55%	
14	34	6,632	26,7	60%		27,6	6,500	23,6	60%		22,2	6,373	20,9	55%		17,8	6,256	18,4	55%	
15	37	6,732	27,4	60%		29,7	6,574	24,5	60%		23,5	6,426	21,4	60%		18,6	6,293	18,7	55%	
16	41	6,839	28,2	60%		32	6,653	24,9	60%		25	6,485	22,0	60%		19,3	6,326	19,2	55%	
17	45	6,951	28,9	60%		34,5	6,736	25,3	60%		26,4	6,539	22,5	60%		20,1	6,362	19,4	55%	
18	49	7,069	30,5	60%		37,2	6,823	26,3	60%		28	6,600	22,6	60%		21	6,402	19,7	55%	
19	54	7,191	31,2	60%		40,1	6,914	26,7	60%		29,7	6,662	23,2	60%		21,9	6,441	20,0	60%	
20	59	7,324	31,9	60%		43,2	7,007	27,7	60%		31,5	6,727	23,6	60%		22,8	6,480	20,2	60%	
21	65	7,462	32,5	60%		46,5	7,104	28,0	60%		33,4	6,793	24,4	60%		23,7	6,517	20,6	60%	
22	71	7,606	34,1	60%		50,1	7,206	29,0	60%		35,4	6,861	24,4	60%		24,7	6,559	21,0	60%	
23	78	7,761	34,6	60%		54	7,313	29,2	60%		37,5	6,931	25,0	60%		25,8	6,603	21,3	60%	
24	85	7,921	36,2	60%		58,2	7,425	30,3	60%		39,7	7,003	25,5	60%		26,8	6,643	21,5	60%	
25	93	8,091	36,5	60%		62,7	7,541	31,4	60%		42,1	7,079	26,2	60%		28	6,690	21,8	60%	
26	102	8,272	38,1	60%		67,6	7,664	31,4	60%		44,6	7,156	26,8	60%		29,1	6,732	22,0	60%	
27	112	8,460	39,7	60%		72,8	7,790	32,5	60%		47,3	7,237	27,4	60%		30,4	6,781	22,3	60%	
28	122	8,658	41,4	60%		78,4	7,921	33,5	60%		50,1	7,319	28,0	60%		31,6	6,825	22,5	60%	
29	134	8,865	41,0	60%		84,5	8,060	34,6	60%		53,1	7,405	27,7	60%		33	6,876	22,7	60%	
30	146	9,083	42,5	55%		91,1	8,205	35,6	60%		56,3	7,495	28,3	60%		34,3	6,923	23,5	60%	
31	160	9,313	43,9	55%		98,1	8,354	36,6	60%		59,7	7,588	28,9	60%		35,8	6,976	23,8	60%	
32	176	9,551	45,2	55%		105,7	8,510	37,6	60%		63,2	7,681	29,4	60%		37,3	7,027	24,0	60%	
33	192	9,802	49,3	55%		113,9	8,673	38,6	60%		67	7,780	29,9	60%		38,8	7,078	24,2	60%	
34	211	10,065	50,7	55%		122,8	8,845	39,6	60%		71	7,881	30,4	60%		40,5	7,135	24,4	60%	
35	231	10,340	51,9	50%		132,3	9,021	40,5	55%		75,3	7,988	32,1	60%		42,2	7,190	25,3	60%	
36	253	10,626	52,9	50%		142,5	9,204	41,3	55%		79,8	8,096	32,6	60%		43,9	7,245	25,4	60%	
37	277	10,923	57,8	50%		153,6	9,396	42,0	55%		84,6	8,209	33,1	60%		45,8	7,305	25,7	60%	
38	303	11,235	58,6	50%		165,5	9,594	42,6	55%		89,6	8,324	33,5	60%		47,7	7,364	25,8	60%	
39	332	11,557	59,1	45%		178,3	9,800	45,7	55%		95	8,445	33,9	60%		49,7	7,425	26,0	60%	
40	364	11,892	64,6	45%		192,1	10,013	46,3	55%		100,7	8,568	34,3	60%		51,8	7,489	26,9	60%	
41	398	12,240	64,8	45%		207	10,235	46,6	50%		106,7	8,696	36,2	60%		53,9	7,551	27,0	60%	
42	436	12,600	70,8	45%		223,1	10,465	50,1	50%		113,1	8,828	36,5	60%		56,2	7,617	27,2	60%	
43	478	12,972	70,4	40%		240,4	10,703	50,3	50%		119,8	8,962	36,7	60%		58,5	7,683	28,2	60%	
44	523	13,357	77,0	40%		259	10,948	54,1	50%		127	9,103	36,9	55%		61	7,753	28,3	60%	
45	5,2E+02	13,365	7,7E+01	40%		2,6E+02	10,961	5,4E+01	50%		1,3E+02	9,122	3,7E+01	55%		6,2E+01	7,781	2,9E+01	60%	
46	5,3E+02	13,373	7,7E+01	40%		2,6E+02	10,974	5,1E+01	50%		1,3E+02	9,142	3,7E+01	55%		6,3E+01	7,808	2,8E+01	60%	
47	5,3E+02	13,381	7,7E+01	40%		2,6E+02	10,987	5,1E+01	50%		1,3E+02	9,161	3,6E+01	55%		6,4E+01	7,836	2,9E+01	60%	
48	5,3E+02	13,389	7,6E+01	40%		2,6E+02	10,999	5,1E+01	50%		1,3E+02	9,180	3,6E+01	55%		6,5E+01	7,863	2,9E+01	60%	
49	5,3E+02	13,397	7,6E+01	40%		2,6E+02	11,012	5,1E+01	50%		1,3E+02	9,199	3,6E+01	55%		6,6E+01	7,890	2,9E+01	60%	

APÊNDICE VII: ANÁLISE DE GANHO DE UTILIDADE ATRAVÉS DA SEGMENTAÇÃO DO PLANO

A conclusão de que a proposta de segmentação do plano básico atual em 4 novos planos com diferentes níveis de alocação em ações trouxe uma melhora significativa nas utilidades totais de cada participante foi feita com base no estudo que apresentaremos neste apêndice.

A análise realizada é bastante simples. A partir dos dados de contribuição e alocação de cada participante do plano atual e adotando valores médios para a rentabilidade do *portfolio* de mercado e para o fluxo salarial, estimamos qual seria o valor de sua utilidade atual. Esse valor foi obtido para todos os participantes do plano através da equação (4.2) da utilidade total do indivíduo, que leva em consideração também as necessidades de consumo de subsistência.

Comparamos este valor com a utilidade que o indivíduo pode vir a ter caso a proposta de segmentação parcial de perfis seja implementada. A primeira comparação foi feita adotando-se os novos valores tanto de contribuição quanto alocação, e a segunda considerando-se apenas o novo nível de alocação em ações.

Nas tabelas a seguir, temos para todos os participantes do plano estudado:

- os valores dos parâmetros que foram necessários ao estudo de caso;
- a estimativa da utilidade atual;
- a estimativa de utilidade com os novos níveis de alocação e contribuição;
- o ganho de utilidade do indivíduo ao alterar apenas o nível seu alocação.

Percebe-se que, para a grande maioria dos participantes é observado um ganho de utilidade com os novos níveis de alocação em ações (98% dos casos). Este ganho não é, em termos percentuais, tão elevado, pelo motivo salientado no Capítulo 5 da decisão de alocação não ser um fator diretamente determinante de utilidade, mas sim o nível de consumo auferido. A seguir, apresentamos as tabelas com os resultados do estudo.

Apêndice VII – Análise de ganho de utilidade através da segmentação do plano

Partici- pante	Perfil de risco	Idade	Sexo	Salário (mil R\$ ano)	Riqueza inicial (mil R\$)	Riqueza inicial / salário	Núm. de depen- dentes	Estudo superior	Neces. de aco- mulação	Alocação em ações		Contribuição		Utilidade esperada		Ganho de utilidade somente com nova alocação
										atual	sugerida	atual	sugerida	atual	sugerida	
1	Agressivo	20	F	20	0	2%	0	Sim	52,93%	20%	70%	3,6%	18%	13,65	15,65	1,21%
2	Moderado	21	M	18	1	5%	0	Sim	45,58%	20%	55%	2,5%	19%	11,36	13,01	0,94%
3	Defensivo	21	M	20	1	4%	0	Sim	45,19%	20%	25%	3,5%	20%	8,88	9,83	0,16%
4	Defensivo	22	F	27	3	11%	0	Sim	54,07%	20%	25%	5,1%	20%	8,71	9,57	0,20%
5	Defensivo	22	F	34	3	8%	0	Sim	55,41%	20%	25%	6,1%	20%	8,71	9,51	0,43%
6	Conservador	22	M	23	2	7%	0	Sim	46,44%	20%	45%	4,2%	20%	9,78	10,94	1,79%
7	Agressivo	22	M	15	1	6%	0	Sim	45,27%	20%	70%	2,0%	18%	13,69	15,92	1,62%
8	Arojado	22	M	18	1	7%	0	Sim	45,27%	20%	60%	2,5%	19%	12,62	14,68	0,28%
9	Conservador	22	M	18	1	7%	0	Sim	45,27%	20%	45%	2,5%	20%	9,78	11,05	1,94%
10	Arojado	22	M	18	1	4%	0	Não	37,24%	20%	60%	2,5%	19%	12,62	14,68	1,01%
11	Defensivo	23	F	23	2	8%	0	Sim	52,76%	20%	25%	4,3%	20%	8,68	9,56	0,19%
12	Arojado	23	F	20	1	7%	0	Não	38,81%	20%	60%	3,5%	19%	12,44	14,35	0,83%
13	Defensivo	23	F	18	1	3%	0	Sim	50,68%	20%	25%	2,5%	20%	8,68	9,65	0,45%
14	Arojado	23	M	12	1	6%	0	Não	37,12%	20%	60%	2,0%	19%	12,59	14,71	0,71%
15	Conservador	23	M	23	2	7%	0	Sim	45,23%	20%	45%	4,8%	20%	9,75	10,88	1,76%
16	Defensivo	23	M	16	0	2%	0	Sim	44,97%	20%	25%	2,0%	20%	8,63	9,85	0,55%
17	Conservador	24	F	89	10	11%	0	Sim	58,84%	20%	45%	8,5%	20%	9,54	10,40	0,90%
18	Defensivo	24	F	24	1	4%	0	Sim	52,53%	20%	25%	4,4%	20%	8,64	9,51	0,37%
19	Moderado	24	F	20	0	2%	1	Sim	85,47%	20%	55%	3,5%	22%	5,59	7,86	0,92%
20	Arojado	24	M	24	2	10%	0	Sim	46,11%	20%	60%	4,4%	19%	12,57	14,40	0,37%
21	Conservador	24	M	14	1	9%	0	Não	36,99%	20%	45%	2,0%	20%	9,72	11,02	0,33%
22	Conservador	24	M	18	0	3%	0	Sim	44,65%	20%	45%	2,5%	20%	9,72	10,99	0,54%
23	Moderado	24	M	20	0	1%	0	Sim	45,39%	20%	55%	3,6%	19%	11,27	12,81	0,67%
24	Moderado	24	M	37	0	1%	4	Sim	111,89%	20%	55%	6,4%	22%	1,56	3,85	0,82%
25	Moderado	25	F	28	6	21%	0	Sim	53,44%	20%	55%	5,3%	19%	11,03	12,38	1,69%
26	Arojado	25	F	18	2	12%	0	Não	36,94%	20%	60%	2,6%	19%	12,36	14,35	0,63%
27	Agressivo	25	F	52	7	13%	0	Sim	56,96%	20%	70%	7,5%	18%	13,55	15,01	3,45%
28	Defensivo	25	F	24	1	6%	0	Sim	52,07%	20%	25%	4,4%	20%	8,60	9,47	0,83%
29	Arojado	25	F	52	0	2%	0	Sim	82,77%	20%	60%	2,0%	21%	6,18	8,74	0,53%
30	Conservador	25	M	26	3	13%	0	Não	40,34%	20%	45%	4,9%	20%	9,69	10,80	0,37%
31	Conservador	25	M	16	1	5%	0	Sim	44,32%	20%	45%	2,0%	20%	9,69	10,98	0,42%
32	Conservador	25	M	20	1	4%	0	Sim	45,10%	20%	45%	3,6%	20%	9,69	10,89	0,44%
33	Agressivo	25	M	44	2	5%	0	Sim	48,43%	20%	70%	7,0%	18%	13,66	15,21	0,83%
34	Conservador	26	F	26	3	10%	0	Sim	52,41%	20%	45%	4,9%	20%	9,45	10,53	0,58%
35	Moderado	26	F	26	2	8%	0	Sim	52,41%	20%	55%	4,9%	19%	10,98	12,36	0,63%
36	Conservador	26	F	24	1	3%	0	Sim	51,65%	20%	45%	4,4%	20%	9,45	10,56	0,48%
37	Defensivo	26	F	28	1	4%	0	Sim	53,10%	20%	25%	5,3%	20%	8,55	9,38	0,25%
38	Conservador	26	F	27	1	2%	0	Sim	52,90%	20%	45%	5,6%	20%	9,45	10,48	0,30%
39	Agressivo	26	M	28	4	15%	0	Sim	46,51%	20%	70%	5,3%	18%	13,64	15,41	0,41%
40	Conservador	26	M	24	2	9%	0	Sim	45,59%	20%	45%	4,4%	20%	9,66	10,80	0,27%
41	Conservador	26	M	44	6	13%	0	Sim	49,33%	20%	45%	7,0%	20%	9,66	10,63	0,40%
42	Arojado	26	M	52	7	13%	0	Sim	45,80%	20%	60%	7,5%	19%	12,51	13,98	0,50%
43	Agressivo	26	M	67	9	14%	0	Sim	45,45%	20%	70%	8,0%	18%	13,64	15,06	0,80%
44	Agressivo	26	M	52	5	10%	0	Sim	48,80%	20%	70%	7,5%	18%	13,64	15,13	0,91%
45	Arojado	26	M	15	0	1%	0	Sim	43,96%	20%	60%	2,0%	19%	12,51	14,60	0,61%
46	Moderado	27	F	67	12	17%	0	Sim	57,88%	20%	55%	8,0%	19%	10,93	12,02	0,55%
47	Conservador	27	F	27	3	11%	2	Sim	122,56%	20%	45%	5,6%	22%	1,48	3,64	0,68%
48	Conservador	27	F	20	0	2%	1	Sim	83,02%	20%	45%	3,5%	22%	5,12	7,01	0,33%
49	Agressivo	27	M	23	4	16%	0	Sim	45,04%	20%	70%	4,1%	18%	13,62	15,54	0,85%
50	Defensivo	27	M	26	5	19%	0	Sim	45,82%	20%	25%	4,9%	20%	8,71	9,58	0,15%
51	Arojado	27	M	20	2	9%	0	Sim	44,38%	20%	60%	3,5%	19%	12,48	14,39	0,44%
52	Conservador	27	M	52	5	10%	0	Sim	48,73%	20%	45%	7,5%	20%	9,62	10,56	0,99%
53	Moderado	28	F	28	7	24%	0	Não	42,48%	20%	55%	5,4%	19%	10,87	12,19	0,06%
54	Arojado	28	F	26	5	19%	0	Não	41,27%	20%	60%	4,9%	19%	12,22	13,92	0,95%
55	Moderado	28	F	24	5	22%	0	Não	45,78%	20%	55%	4,4%	22%	5,52	7,64	0,70%
56	Moderado	28	F	25	4	16%	2	Sim	120,36%	20%	55%	5,9%	22%	1,60	3,97	0,88%
57	Agressivo	28	F	36	8	23%	0	Sim	54,21%	20%	70%	6,3%	18%	13,46	15,03	0,44%
58	Moderado	28	F	36	5	15%	0	Sim	54,21%	20%	55%	6,3%	19%	10,87	12,11	0,55%
59	Defensivo	28	F	24	2	9%	0	Sim	50,84%	20%	25%	4,5%	20%	8,45	9,30	0,41%
60	Arojado	28	F	26	2	8%	0	Sim	51,58%	20%	60%	4,9%	19%	12,22	13,92	1,14%
61	Agressivo	28	F	44	4	8%	0	Sim	55,70%	20%	70%	7,0%	18%	13,45	14,93	1,27%
62	Moderado	28	F	38	3	9%	0	Sim	54,70%	20%	55%	6,9%	19%	10,87	12,05	0,88%
63	Moderado	28	F	13	0	2%	1	Sim	79,88%	20%	55%	2,0%	22%	5,52	7,89	0,36%
64	Conservador	28	F	12	0	1%	0	Não	36,36%	20%	45%	2,0%	20%	9,34	10,58	0,61%
65	Arojado	28	M	24	4	17%	0	Sim	45,00%	20%	60%	4,4%	19%	12,44	14,25	0,13%
66	Moderado	28	M	20	3	13%	0	Sim	44,05%	20%	55%	3,5%	19%	11,13	12,64	0,29%
67	Agressivo	28	M	24	1	6%	1	Sim	74,99%	20%	70%	4,4%	20%	6,84	9,11	0,35%
68	Defensivo	28	M	12	0	3%	0	Não	36,45%	20%	25%	2,0%	20%	8,68	9,67	0,22%
69	Moderado	28	M	36	1	3%	0	Sim	47,52%	20%	55%	6,9%	19%	11,13	12,34	0,31%
70	Conservador	29	F	18	2	12%	0	Sim	47,28%	20%	45%	2,5%	20%	9,28	10,48	0,46%
71	Conservador	29	F	36	9	26%	0	Sim	53,91%	20%	45%	6,3%	20%	9,28	10,25	0,24%
72	Agressivo	29	F	47	20	43%	0	Não	48,18%	20%	70%	7,2%	18%	13,44	14,89	0,43%
73	Moderado	29	F	28	5	19%	0	Sim	51,95%	20%	55%	5,3%	19%	10,81	12,12	0,29%
74	Agressivo	29	F	74	20	27%	0	Sim	58,27%	20%	70%	8,2%	18%	13,42	14,74	0,83%
75	Moderado	29	F	32	4	11%	0	Sim	53,14%	20%	55%	5,9%	19%	10,81	12,07	0,74%
76	Arojado	29	F	36	6	17%	0	Sim	53,91%	20%	60%	6,3%	19%	12,17	13,70	0,81%
77	Defensivo	29	F	15	1	6%	1	Sim	78,81%	20%	25%	2,0%	22%	4,80	6,55	0,22%
78	Agressivo	29	F	20	2	9%	0	Não	37,87%	20%	70%	3,5%	18%	13,43	15,32	0,36%
79	Conservador	29	F	39	5	14%	0	Sim	54,65%	20%	45%	6,6%	20%	9,28	10,23	0,54%
80	Defensivo	29	F	26	3	10%	0	Sim	51,13%	20%	25%	4,9%	20%	8,40	9,22	0,14%
81	Arojado	29	F	52	7	13%	0	Sim	55,47%	20%	60%	7,5%	19%	12,17	13,57	0,20%
82	Arojado	29	F	20	1	4%	0	Não	37,93%	20%	60%	3,5%	19%	12,17	14,00	0,85%
83	Conservador	29	F	20	1	3%	1	Sim	81,26%	20%	45%	3,6%	22%	5,06	6,93	0,06%
84	Conservador	29	M	26	3	11%	0	Sim	45,25%	20%	45%	4,9%	20%	9,54	10,63	0,86%
85	Conservador	29	M	24	2	7%	0	Sim	44,67%	20%	45%	4,4%	20%	9,54	10,67	0,74%
86	Conservador	30	F	26	5	20%	0	Sim	50,66%	20%	45%	4,9%	20%	9,22	10,27	0,42%
87	Moderado	30	F	36	7	20%	0	Sim	53,61%	20%	55%	6,3%	19%	10,74	11,95	0,00%
88	Moderado	30	F	12	1	13%	0	Não	35,94%	20%	55%	2,0%	19%	10,74	12,31	0,60%
89	Defensivo	30	F	41	9	21%	0	Sim	54,80%	20%	25%	6,8%	20%	8,34	9,07	0,30%
90	Moderado	30	F	34	5	16%	0	Sim	53,12%	20%	55%	6,1%	19%	10,74	11,97	0,93%
91	Agressivo	30	F	20	1	7%	1	Sim	80,25%	20%	70%	3,6%	20%	6,91	9,15	0,24%
92	Agressivo	30	F	18	0	3%	1	Sim	77,68%	20%	70%	2,5%	20%	6,90	9,26	0,60%
93	Cons															

Apêndice VII – Análise de ganho de utilidade através da segmentação do plano

Parti- pante	Perfil de risco	Idade	Sexo	Salário (mil R\$ ano)	Riqueza inicial (mil R\$)	Riqueza inicial / salário	Núm. de depen- dentes	Estudo superior	Neces. de acu- mulação	Alocação em ações atual	sugerida	Contribuição atual	sugerida	Utilidade esperada atual	sugerida	Ganho de utilidade somente com nova alocação
110	Defensivo	31	M	89	25	29%	0	Sim	50,12%	20%	25%	8,5%	20%	8,55	9,22	0,15%
111	Conservador	31	M	96	29	30%	1	Sim	63,85%	20%	45%	8,6%	22%	5,14	6,58	0,86%
112	Conservador	31	M	67	12	18%	1	Sim	62,20%	20%	45%	8,0%	22%	5,14	6,64	0,57%
113	Defensivo	31	M	59	7	13%	0	Sim	48,88%	20%	25%	7,8%	20%	8,55	9,26	0,31%
114	Agressivo	32	F	122	56	46%	1	Sim	100,74%	20%	70%	8,9%	20%	6,93	8,47	0,30%
115	Agressivo	32	F	24	4	17%	0	Não	39,56%	20%	70%	4,4%	18%	13,29	15,02	0,50%
116	Agressivo	32	F	35	5	14%	1	Sim	88,01%	20%	70%	6,3%	20%	6,92	8,79	0,98%
117	Arojado	32	F	34	7	21%	0	Sim	52,38%	20%	60%	6,1%	19%	11,97	13,48	0,17%
118	Defensivo	32	F	47	10	21%	1	Sim	92,13%	20%	25%	7,2%	22%	4,70	6,03	0,56%
119	Agressivo	32	F	28	4	13%	0	Sim	50,56%	20%	70%	5,3%	18%	13,27	14,88	0,84%
120	Conservador	32	F	89	11	13%	2	Sim	137,98%	20%	45%	8,6%	22%	1,46	3,24	0,45%
121	Moderado	32	M	89	31	36%	0	Sim	50,14%	20%	55%	8,5%	19%	10,93	11,57	0,71%
122	Conservador	32	M	118	46	39%	0	Sim	50,83%	20%	45%	8,9%	20%	9,40	10,22	0,89%
123	Moderado	32	M	96	10	10%	1	Sim	63,92%	20%	55%	8,6%	22%	5,54	7,22	0,72%
124	Moderado	33	F	55	15	26%	0	Sim	56,25%	20%	55%	7,6%	19%	10,50	11,57	1,73%
125	Agressivo	33	F	73	24	34%	0	Sim	58,08%	20%	70%	8,2%	18%	13,21	14,48	0,11%
126	Arojado	33	F	65	18	27%	0	Sim	57,42%	20%	60%	8,0%	19%	11,90	13,19	0,07%
127	Arojado	33	F	20	1	4%	3	Sim	107,30%	20%	60%	3,5%	21%	2,14	4,51	0,20%
128	Arojado	33	F	18	0	2%	0	Sim	44,38%	20%	60%	2,6%	19%	11,90	13,75	0,78%
129	Agressivo	33	F	21	1	2%	0	Sim	46,29%	20%	70%	3,6%	18%	13,19	14,96	0,08%
130	Moderado	33	F	32	1	4%	0	Sim	51,54%	20%	55%	5,9%	19%	10,50	11,71	0,41%
131	Agressivo	33	F	32	1	3%	1	Sim	85,89%	20%	70%	5,9%	20%	6,91	8,78	0,46%
132	Defensivo	33	M	20	4	19%	2	Não	86,94%	20%	25%	3,6%	22%	1,43	3,70	0,29%
133	Conservador	33	M	18	2	10%	0	Sim	40,77%	20%	45%	2,5%	20%	9,34	10,55	0,02%
134	Conservador	33	M	39	14	36%	0	Sim	46,68%	20%	45%	6,9%	20%	9,34	10,38	0,80%
135	Conservador	33	M	13	1	9%	0	Sim	40,77%	20%	45%	2,0%	20%	9,34	10,58	0,20%
136	Conservador	33	M	20	1	6%	1	Sim	69,94%	20%	45%	3,6%	22%	5,09	6,97	0,75%
137	Arojado	34	F	41	13	33%	2	Sim	125,15%	20%	60%	6,8%	21%	2,17	4,11	0,88%
138	Arojado	34	F	37	1	3%	0	Sim	52,52%	20%	60%	6,4%	19%	11,81	13,25	0,89%
139	Arojado	34	M	53	19	35%	1	Não	77,76%	20%	60%	7,8%	21%	6,15	7,95	0,53%
140	Moderado	34	M	18	0	2%	1	Não	59,17%	20%	55%	2,5%	19%	5,90	7,79	0,87%
141	Arojado	35	F	20	18	90%	0	Não	36,90%	20%	80%	3,6%	20%	11,61	13,45	0,82%
142	Arojado	35	F	42	17	40%	0	Não	47,72%	20%	70%	6,9%	24%	11,09	13,11	1,00%
143	Defensivo	35	F	46	6	14%	0	Sim	54,29%	20%	25%	7,1%	26%	7,57	8,64	0,42%
144	Arojado	35	F	42	0	1%	1	Sim	88,93%	20%	75%	6,8%	35%	3,86	7,85	0,04%
145	Arojado	35	M	18	3	16%	2	Não	82,88%	20%	60%	3,5%	21%	2,07	4,52	0,45%
146	Agressivo	35	M	24	4	16%	0	Sim	42,24%	20%	70%	4,4%	18%	13,39	15,16	0,91%
147	Conservador	35	M	81	21	25%	1	Sim	63,19%	20%	45%	8,4%	22%	5,03	6,46	0,77%
148	Defensivo	35	M	41	6	20%	1	Sim	67,65%	20%	25%	6,8%	22%	4,77	6,15	0,76%
149	Agressivo	35	M	148	36	25%	1	Sim	86,05%	20%	70%	8,1%	20%	6,93	8,47	0,43%
150	Moderado	35	M	80	15	19%	1	Sim	83,08%	20%	55%	8,3%	22%	5,47	7,14	0,36%
151	Defensivo	35	M	74	10	14%	2	Sim	115,61%	20%	25%	6,2%	22%	1,43	3,17	0,35%
152	Defensivo	35	M	20	1	4%	1	Sim	68,20%	20%	25%	3,6%	22%	4,77	6,40	0,46%
153	Agressivo	36	F	46	15	32%	0	Sim	53,99%	20%	75%	7,1%	23%	12,29	14,30	0,93%
154	Conservador	36	F	24	3	13%	1	Não	64,94%	20%	45%	4,4%	35%	3,10	6,46	0,34%
155	Conservador	36	F	36	4	11%	3	Sim	119,42%	20%	45%	6,3%	35%	-0,68	3,39	0,65%
156	Agressivo	36	F	104	102	99%	1	Sim	100,49%	20%	100%	8,7%	30%	5,42	8,43	0,38%
157	Defensivo	36	M	168	70	42%	1	Sim	86,77%	20%	25%	9,2%	22%	4,73	5,92	0,49%
158	Defensivo	36	M	26	8	32%	1	Sim	71,05%	20%	25%	5,4%	22%	4,73	6,22	0,28%
159	Moderado	36	M	32	10	31%	0	Sim	44,35%	20%	55%	6,2%	19%	10,67	11,88	0,10%
160	Arojado	36	M	73	35	48%	1	Sim	62,45%	20%	60%	8,4%	21%	6,13	7,62	0,43%
161	Agressivo	36	M	24	2	9%	3	Não	90,86%	20%	70%	4,4%	20%	2,77	4,94	0,74%
162	Moderado	37	F	41	30	73%	1	Sim	87,54%	20%	60%	6,3%	35%	3,27	6,93	0,34%
163	Defensivo	37	F	46	17	38%	0	Não	49,09%	20%	25%	7,1%	26%	7,39	8,43	0,11%
164	Defensivo	37	F	20	12	60%	1	Não	60,78%	20%	30%	3,6%	36%	2,79	5,98	0,46%
165	Defensivo	37	F	36	36	101%	1	Sim	84,46%	20%	45%	6,3%	32%	3,34	5,79	0,66%
166	Moderado	37	M	55	18	33%	0	Sim	47,92%	20%	55%	7,6%	19%	10,59	11,67	0,53%
167	Conservador	38	F	39	11	29%	0	Sim	51,28%	20%	40%	6,6%	26%	8,03	9,35	0,44%
168	Defensivo	38	F	30	7	25%	0	Sim	47,64%	20%	25%	5,5%	26%	7,29	8,38	0,28%
169	Arojado	38	F	46	16	36%	0	Sim	53,31%	20%	70%	7,1%	24%	10,80	12,70	0,62%
170	Arojado	38	F	20	18	87%	1	Sim	69,77%	20%	90%	3,5%	30%	4,70	8,08	0,50%
171	Defensivo	38	F	36	12	34%	2	Não	106,08%	20%	30%	6,3%	36%	-0,88	3,16	0,18%
172	Agressivo	38	F	84	70	83%	1	Sim	98,56%	20%	100%	8,4%	30%	5,44	8,38	0,51%
173	Conservador	38	F	18	1	7%	0	Não	34,00%	20%	40%	2,5%	26%	8,03	9,57	0,23%
174	Conservador	38	F	32	23	73%	1	Sim	81,43%	20%	45%	5,9%	35%	3,05	6,19	0,15%
175	Agressivo	38	F	36	0	1%	0	Sim	50,14%	20%	75%	6,3%	23%	12,07	14,05	0,65%
176	Conservador	38	M	32	14	42%	1	Não	70,64%	20%	45%	5,9%	22%	4,93	6,53	0,01%
177	Agressivo	38	M	26	5	21%	2	Não	92,31%	20%	70%	4,9%	20%	2,86	4,93	0,16%
178	Moderado	39	F	41	14	35%	1	Sim	86,06%	20%	60%	6,8%	35%	3,34	6,78	0,30%
179	Agressivo	39	F	168	170	101%	0	Sim	63,67%	20%	100%	9,2%	30%	11,04	13,72	0,47%
180	Defensivo	39	M	71	25	35%	3	Sim	114,95%	20%	25%	6,2%	22%	1,41	3,10	0,35%
181	Moderado	39	M	204	126	63%	0	Sim	53,16%	20%	55%	9,4%	19%	10,41	11,32	0,26%
182	Moderado	39	M	18	2	14%	1	Não	57,57%	20%	55%	3,3%	19%	5,74	7,47	0,28%
183	Conservador	39	M	61	32	53%	1	Sim	80,52%	20%	45%	8,0%	22%	4,89	6,29	0,36%
184	Conservador	39	M	130	42	32%	1	Sim	86,48%	20%	45%	9,0%	22%	4,89	6,21	0,56%
185	Agressivo	40	F	130	68	52%	2	Sim	146,05%	20%	85%	9,0%	34%	1,02	4,51	0,17%
186	Arojado	40	F	41	35	84%	2	Sim	119,34%	20%	90%	6,8%	30%	1,03	4,13	0,51%
187	Moderado	40	F	46	19	42%	2	Sim	122,55%	20%	60%	7,1%	35%	-0,30	3,52	0,36%
188	Agressivo	40	F	111	148	133%	1	Sim	102,51%	20%	100%	8,8%	30%	5,47	8,25	0,39%
189	Defensivo	40	F	36	8	22%	2	Sim	114,23%	20%	30%	6,3%	36%	-0,81	3,69	0,84%
190	Defensivo	40	F	53	12	23%	1	Sim	90,66%	20%	30%	7,8%	36%	2,70	5,45	0,17%
191	Conservador	40	F	32	1	3%	1	Sim	79,22%	20%	45%	5,9%	35%	2,99	6,02	0,08%
192	Conservador	40	M	180	108	60%	2	Sim	123,96%	20%	45%	9,3%	35%	-0,71	3,09	0,53%
193	Moderado	40	M	148	73	49%	3	Sim	122,58%	20%	60%	9,1%	35%	-0,53	3,38	0,64%
194	Conservador	40	M	71	27	37%	0	Sim	49,18%	20%	40%	6,1%	26%	8,33	9,62	0,09%
195	Arojado	40	M	122	66	54%	0	Sim	51,85%	20%	70%	8,9%	24%	11,09	12,89	0,56%
196	Conservador	40	M	41	7	17%	0	Sim	45,22%	20%	40%	6,8%	26%	8,33	9,70	0,33%
197	Moderado	41	F	31	8	27%	0	Sim	45,93%	20%	65%	5,7%	25%	8,97	10,63	0,16%
198	Defensivo	41	F	26	32	122%	2	Não	92,78%	20%	45%	4,9%	32%	-0,07	3,17	0,63%
199	Defensivo	41	F	12	10	80%	2	Não	77,30%	20%	45%	2,0%	32%	-0,07	3,41	0,26%
200	Defensivo	41	F	36	33	92%	2	Sim	112,71%	20%	45%	6,3%	32%	-0,07	3,05	0,26%
201	Moderado	41	F	24	0	1%	2	Sim	96,86%	20%	60%	4,4%				

Apêndice VII – Análise de ganho de utilidade através da segmentação do plano

Partic. ponto	Perfil de risco	Idade	Sexo	Salário (mil R\$ ano)	Riqueza inicial (mil R\$)	Riqueza inicial / salário	Núm. de depen- dentes	Estudo superior	Neces. de acu- mulado	Alocação em ações atual	sugerida	Contribuição atual	sugerida	Utilidade esperada atual	sugerida	Ganho de utilidade somente com nova alocação
219	Arrojado	43	F	35	25	73%	2	Sim	108,21%	20%	75%	5,2%	35%	0,44	4,15	0,74%
220	Defensivo	43	F	36	13	36%	0	Sim	46,91%	20%	25%	6,3%	26%	6,65	7,51	0,54%
221	Moderado	43	F	46	10	23%	3	Sim	119,21%	20%	60%	7,1%	35%	-0,12	3,44	0,99%
222	Conservador	43	F	27	6	21%	2	Não	94,36%	20%	45%	5,1%	35%	-0,41	3,24	0,40%
223	Defensivo	43	F	41	7	18%	2	Sim	115,37%	20%	30%	6,8%	36%	-0,88	2,91	0,61%
224	Conservador	43	F	28	3	12%	1	Sim	71,26%	20%	45%	5,3%	35%	2,88	5,75	0,33%
225	Agressivo	43	M	18	2	14%	0	Sim	33,60%	20%	75%	2,5%	23%	12,12	14,53	0,83%
226	Arrojado	43	M	180	187	104%	2	Sim	126,26%	20%	90%	9,3%	30%	0,93	3,85	0,06%
227	Arrojado	43	M	61	36	59%	0	Sim	47,77%	20%	70%	8,0%	24%	10,81	12,62	0,14%
228	Conservador	44	F	71	25	35%	3	Sim	133,83%	20%	45%	8,2%	35%	-0,35	2,92	0,29%
229	Moderado	44	F	12	2	13%	1	Não	53,80%	20%	65%	2,0%	25%	4,50	6,66	0,75%
230	Arrojado	44	F	46	50	108%	0	Sim	50,54%	20%	80%	7,1%	20%	10,38	11,59	0,01%
231	Defensivo	44	F	84	84	99%	3	Sim	138,97%	20%	45%	8,4%	32%	0,02	2,72	0,08%
232	Agressivo	44	F	27	5	17%	1	Sim	68,50%	20%	65%	5,1%	34%	4,69	8,01	0,71%
233	Arrojado	44	F	44	57	127%	1	Sim	84,36%	20%	90%	7,0%	30%	4,61	7,20	0,72%
234	Conservador	44	M	20	4	20%	3	Não	82,72%	20%	45%	3,6%	35%	-0,58	3,56	0,44%
235	Conservador	44	M	41	46	112%	0	Sim	43,54%	20%	55%	6,8%	22%	8,23	9,20	0,02%
236	Arrojado	44	M	61	46	75%	2	Sim	111,08%	20%	90%	8,0%	30%	0,98	4,00	0,58%
237	Arrojado	44	M	20	19	92%	3	Sim	80,60%	20%	90%	3,6%	30%	0,98	4,51	0,94%
238	Agressivo	45	M	26	5	21%	2	Sim	86,26%	20%	85%	4,9%	34%	1,04	4,96	0,56%
239	Moderado	45	F	130	70	54%	2	Sim	151,46%	20%	60%	9,0%	35%	0,02	3,19	0,05%
240	Moderado	45	F	74	25	34%	2	Sim	134,81%	20%	60%	8,2%	35%	0,02	3,26	0,53%
241	Arrojado	45	F	37	27	72%	0	Sim	46,00%	20%	70%	6,4%	24%	9,73	11,37	0,65%
242	Conservador	45	F	46	19	42%	3	Sim	116,53%	20%	45%	7,1%	35%	-0,30	2,96	0,58%
243	Conservador	45	F	36	10	27%	4	Sim	105,52%	20%	45%	6,3%	35%	-0,30	3,03	0,04%
244	Arrojado	45	F	20	28	135%	4	Sim	80,75%	20%	90%	3,6%	30%	1,35	4,37	0,98%
245	Arrojado	46	F	77	34	44%	1	Sim	97,23%	20%	75%	8,3%	35%	3,82	6,75	0,18%
246	Conservador	46	F	31	46	152%	1	Sim	88,92%	20%	80%	5,7%	32%	3,10	5,33	0,52%
247	Arrojado	46	F	25	6	23%	1	Não	64,36%	20%	75%	4,9%	35%	3,00	7,00	0,88%
248	Arrojado	46	F	47	44	93%	3	Sim	116,13%	20%	90%	7,2%	30%	1,39	3,95	0,10%
249	Agressivo	46	F	41	6	14%	1	Sim	79,89%	20%	85%	6,8%	34%	4,56	7,45	0,36%
250	Arrojado	46	F	36	43	122%	2	Não	106,83%	20%	90%	6,3%	30%	1,40	4,05	0,96%
251	Moderado	46	F	20	1	4%	1	Não	56,44%	20%	65%	3,5%	25%	4,34	6,23	0,12%
252	Arrojado	46	M	101	47	46%	3	Sim	120,98%	20%	75%	8,7%	35%	0,28	3,91	0,65%
253	Conservador	46	M	20	4	19%	3	Não	81,73%	20%	45%	3,6%	35%	-0,50	3,47	0,46%
254	Defensivo	46	M	122	65	53%	2	Sim	124,24%	20%	30%	8,9%	36%	-0,77	2,81	0,70%
255	Arrojado	46	M	41	12	30%	2	Sim	99,28%	20%	75%	6,8%	35%	0,28	4,11	0,48%
256	Defensivo	46	M	334	464	139%	0	Sim	57,88%	20%	40%	9,6%	22%	7,18	7,80	0,48%
257	Moderado	46	M	211	130	62%	2	Sim	131,19%	20%	60%	9,4%	35%	-0,24	3,26	0,37%
258	Conservador	47	F	43	68	160%	1	Sim	78,56%	20%	60%	6,9%	32%	3,04	5,11	0,04%
259	Arrojado	47	F	41	23	57%	2	Sim	108,65%	20%	75%	6,8%	35%	0,74	3,88	0,27%
260	Moderado	47	F	36	43	122%	2	Sim	101,16%	20%	80%	6,3%	30%	0,86	3,36	0,43%
261	Conservador	47	F	27	1	5%	2	Sim	68,17%	20%	45%	5,1%	35%	-0,18	3,00	0,46%
262	Defensivo	47	M	61	94	155%	1	Sim	78,32%	20%	45%	8,0%	32%	3,13	5,24	0,41%
263	Defensivo	47	M	89	4	4%	5	Sim	118,79%	20%	30%	8,5%	36%	-0,73	2,80	0,28%
264	Conservador	48	M	29	9	33%	2	Sim	18,79%	20%	40%	5,4%	26%	0,95	3,21	0,48%
265	Moderado	48	F	20	4	19%	1	Sim	51,36%	20%	65%	3,6%	25%	4,16	5,88	0,35%
266	Arrojado	48	F	12	1	13%	0	Sim	28,31%	20%	70%	2,0%	24%	8,90	10,52	0,22%
267	Arrojado	48	F	31	7	21%	1	Sim	65,21%	20%	75%	5,7%	35%	3,69	6,51	0,44%
268	Arrojado	48	F	41	9	21%	1	Sim	76,08%	20%	75%	6,8%	35%	3,69	6,43	0,00%
269	Defensivo	48	F	28	27	95%	3	Não	94,50%	20%	45%	5,3%	32%	0,16	2,71	0,00%
270	Defensivo	48	F	119	13	11%	1	Sim	109,65%	20%	30%	8,9%	36%	2,34	4,43	0,28%
271	Defensivo	48	M	211	130	62%	2	Sim	134,53%	20%	30%	9,4%	36%	-0,68	2,68	0,22%
272	Arrojado	48	M	18	22	119%	1	Não	54,28%	20%	80%	3,5%	20%	5,93	7,67	0,11%
273	Conservador	49	F	41	13	32%	1	Sim	74,51%	20%	45%	6,8%	35%	2,58	4,77	0,05%
274	Agressivo	49	F	71	76	107%	0	Sim	56,76%	20%	90%	8,2%	20%	10,04	10,99	0,31%
275	Conservador	49	F	64	32	49%	3	Sim	127,23%	20%	45%	8,0%	35%	-0,05	2,65	0,15%
276	Conservador	49	F	65	77	118%	0	Sim	54,77%	20%	55%	8,0%	22%	6,33	7,04	0,08%
277	Arrojado	49	F	20	9	42%	2	Não	77,17%	20%	75%	3,6%	35%	0,81	3,95	0,45%
278	Conservador	49	M	41	25	62%	0	Sim	40,73%	20%	40%	6,8%	26%	7,19	8,34	0,31%
279	Moderado	49	M	122	135	110%	2	Sim	126,92%	20%	80%	8,9%	30%	0,72	3,24	0,16%
280	Arrojado	49	M	41	54	133%	2	Sim	94,81%	20%	90%	6,8%	30%	1,32	4,11	0,39%
281	Conservador	50	F	80	33	42%	1	Sim	98,55%	20%	45%	8,3%	35%	2,51	4,49	0,32%
282	Arrojado	50	F	71	31	44%	0	Sim	56,59%	20%	70%	8,2%	24%	8,25	9,38	0,45%
283	Defensivo	50	F	80	33	42%	0	Sim	59,13%	20%	25%	8,3%	26%	5,28	5,94	0,46%
284	Conservador	50	F	31	52	172%	0	Sim	36,65%	20%	65%	5,7%	22%	6,11	6,82	0,21%
285	Conservador	50	M	15	0	1%	3	Sim	61,46%	20%	45%	2,3%	35%	-0,30	3,36	0,28%
286	Conservador	51	F	26	6	24%	1	Não	63,04%	20%	45%	4,9%	35%	2,42	4,42	0,26%
287	Defensivo	51	F	41	57	139%	2	Não	117,35%	20%	45%	6,8%	32%	0,30	2,36	0,30%
288	Arrojado	51	F	32	1	4%	2	Não	101,70%	20%	75%	5,9%	35%	0,71	2,89	0,36%
289	Arrojado	51	M	55	46	83%	0	Sim	45,23%	20%	80%	7,8%	20%	9,94	11,03	0,42%
290	Conservador	52	F	20	4	19%	0	Não	31,83%	20%	25%	3,6%	27%	5,22	6,08	0,23%
291	Defensivo	52	F	16	0	2%	3	Sim	59,23%	20%	25%	2,0%	29%	0,61	2,11	0,13%
292	Conservador	52	M	28	7	25%	3	Não	92,77%	20%	45%	5,3%	35%	-0,18	2,99	0,14%
293	Moderado	53	F	41	46	110%	0	Sim	45,64%	20%	25%	6,8%	22%	6,08	6,79	0,29%
294	Defensivo	53	F	52	119	230%	3	Sim	121,60%	20%	40%	7,5%	41%	-0,58	2,12	0,26%
295	Moderado	53	F	46	19	40%	1	Sim	80,95%	20%	80%	7,1%	45%	1,60	4,27	0,23%
296	Agressivo	53	F	15	2	11%	0	Sim	25,26%	20%	35%	2,0%	25%	6,97	7,84	0,21%
297	Defensivo	53	F	36	3	9%	1	Sim	69,08%	20%	70%	6,3%	45%	1,13	3,40	0,39%
298	Defensivo	53	M	207	265	128%	3	Sim	152,25%	20%	45%	9,4%	32%	0,16	2,42	0,01%
299	Conservador	54	F	46	19	41%	0	Sim	49,56%	20%	25%	7,1%	27%	4,48	5,09	0,32%
300	Defensivo	54	F	46	94	205%	0	Sim	49,56%	20%	15%	7,1%	22%	4,22	4,60	0,29%
301	Arrojado	54	F	24	15	65%	0	Sim	31,05%	20%	35%	4,4%	25%	6,07	7,03	0,30%
302	Arrojado	54	M	122	86	70%	0	Sim	61,24%	20%	75%	8,9%	35%	7,59	9,86	0,07%
303	Conservador	54	M	15	2	15%	3	Não	70,66%	20%	45%	2,3%	35%	-0,05	3,03	0,30%
304	Agressivo	54	M	31	4	14%	1	Não	68,95%	20%	85%	5,7%	34%	4,20	6,67	0,32%
305	Defensivo	55	F	12	2	13%	0	Não	27,54%	20%	25%	2,0%	29%	3,49	3,67	0,15%
306	Conservador	55	F	71	96	136%	0	Sim	66,40%	20%	45%	8,2%	41%	3,50	4,64	0,44%
307	Arrojado	55	F	41	12	29%	1	Não	85,36%	20%	90%	6,8%	45%	1,31	3,18	0,47%
308	Moderado	55	F	41	2	5%	2	Sim	110,34%	20%	80%	6,8%	45%	-0,75	0,80	0,14%
309	Defensivo	55	M	15	2	12%	1	Não	49,82%	20%	25%	2,0%	26%	3,06	4,39	0,21%
310	Moderado	56	F	18	2	14%	0	Não	27							